Mesa 1

MATEMÁTICA

L

LIVRO DE RESOLUÇÕES
(2ª PARTE)

KUMON

Março/2004

KUMON INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

L 101a KUMON Aplicações para Equações e Inequações

(33 pontos)

As raízes reais da equação $f(x) = 0$ correspondem aos pontos onde a função $y = f(x)$ cruza o eixo x.

1. Encontre o número de raízes reais das seguintes equações, usando o esboço do gráfico.

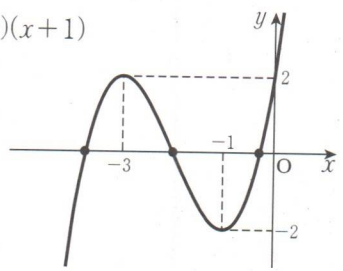
Ex.

$x^3 + 6x^2 + 9x + 2 = 0$

[Res.] Seja $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+3)(x+1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗



$f(0) = 2$

Do gráfico, podemos encontrar que a equação tem 3 raízes reais.

A curva intercepta o eixo x em 3 pontos diferentes.

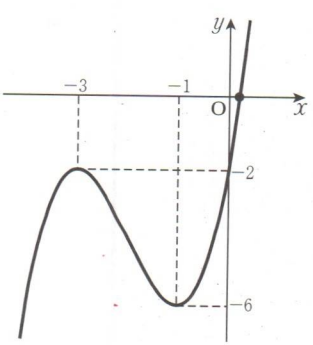
(1) $x^3 + 6x^2 + 9x - 2 = 0$

[Res.] Seja $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$

$= 3(x+3)(x+1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-2	↘	-6	↗



$f(0) = -2$

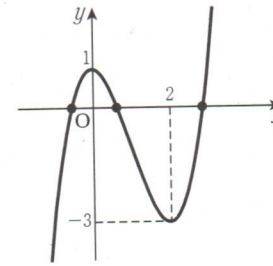
Do gráfico, a equação tem **1 raiz real**.

(2) $x^3-3x^2+1=0$

[Res.] Seja $f(x)=x^3-3x^2+1$

$f'(x)=3x^2-6x$

$=3x(x-2)$



x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	−3	↗

Do gráfico, a equação tem
3 raízes reais.

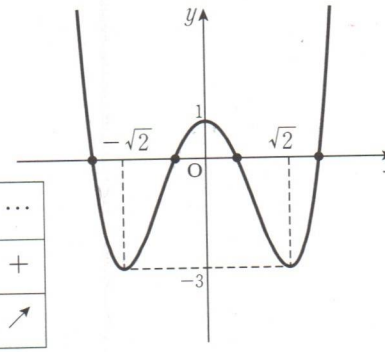
(3) $x^4-4x^2+1=0$

[Res.] Seja $f(x)=x^4-4x^2+1$

$f'(x)=4x^3-8x$

$=4x(x^2-2)$

$=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$



x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−3	↗	1	↘	−3	↗

Do gráfico, a equação tem
4 raízes reais.

L102a KUMON Aplicações para Equações e Inequações

(33 pontos)

1. Encontre o número de raízes positivas e o número de raízes negativas, usando o esboço de cada uma das seguintes equações.

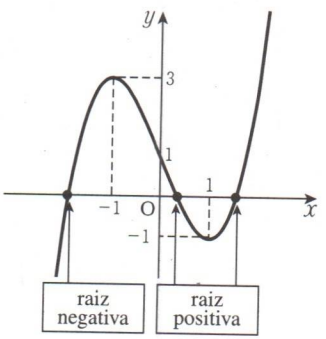
Ex.

$x^3-3x+1=0$

[Res.] Seja $f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗



$f(0)=1$

Do gráfico,

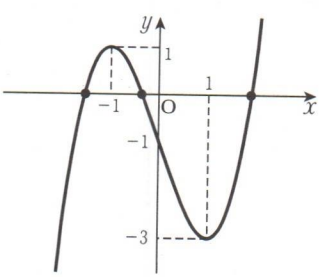
há 2 raízes positivas e 1 raiz negativa.

(1) $x^3-3x-1=0$

[Res.] Seja $f(x)=x^3-3x-1$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗



$f(0)=-1$

Do gráfico,

há 1 raiz positiva e 2 raízes negativas.

(2) $x^3-6x^2+9x-3=0$

[Res.] Seja $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

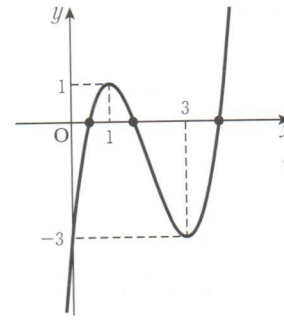
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	−3	↗

$f(0)=-3$

Do gráfico,

há 3 raízes positivas.



(3) $x^4-2x^2-1=0$

[Res.] Seja $f(x)=x^4-2x^2-1$

$f'(x)=4x^3-4x$

$=4x(x^2-1)$

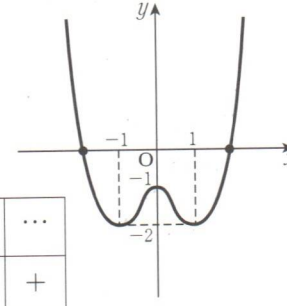
$=4x(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−2	↗	−1	↘	−2	↗

$f(0)=-1$

Do gráfico,

há 1 raiz positiva e 1 raiz negativa.



L 103a KUMON Aplicações para Equações e Inequações

(50 pontos)

Ex.

Encontre o número de raízes reais da equação cúbica $x^3-3x+1-a=0$, usando o esboço do gráfico (Considere valores diferentes de a.)

[Res.]

De $x^3-3x+1=a$, ☜ Rearranjando a equação original.

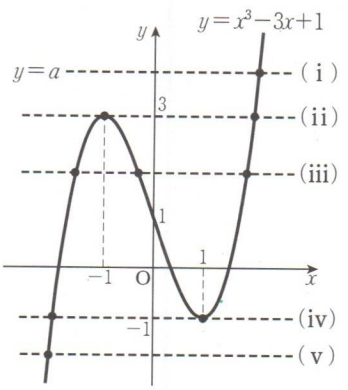
seja

$$\begin{cases} y=a & \cdots ① \\ y=x^3-3x+1 & \cdots ② \end{cases}$$

De ②,

$$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	3	↘	-1	↗



Do gráfico, podemos encontrar o número de pontos comuns entre ① e ②. O número de raízes reais:

Quando $a>3$, há [1] raiz real/ raízes reais. ☜ Do gráfico de (i)

Quando $a=3$, há [2] raiz real/ raízes reais. ☜ Do gráfico de (ii)

Quando [-1] $<a<3$, há [3] raiz real/raízes reais. ☜ Do gráfico de (iii)

Quando $a=$ [-1], há [2] raiz real/raízes reais. ☜ Do gráfico de (iv)

Quando $a<$ [-1], há [1] raiz real/raízes reais. ☜ Do gráfico de (v)

Respostas: na ordem 1, 2, −1, 3, −1, 2, −1, 1

L I 03b

1. Encontre o número de raízes reais da equação de quarto grau $2x^4-3x^2-a=0$, usando o esboço do gráfico. (Considere diferentes valores de a.)

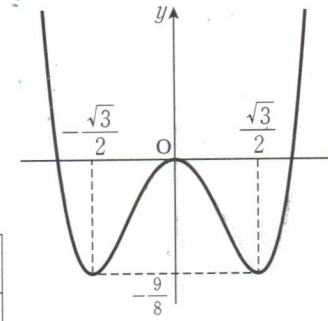
[Res.] De $2x^4-3x^2=a$,

seja

$$\begin{cases} y=a & \cdots ① \\ y=2x^4-3x^2 & \cdots ② \end{cases}$$

De ②,

$$y'=8x^3-6x=2x(4x^2-3)$$
$$=2x(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})$$



x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	$-\frac{9}{8}$	↗	0	↘	$-\frac{9}{8}$	↗

Do gráfico, podemos encontrar o número de pontos comuns entre ① e ②.

O número de raízes reais:

Quando $a>0$, há 2 raízes reais.

Quando $a=0$, há 3 raízes reais.

Quando $-\frac{9}{8}<a<0$, há 4 raízes reais.

Quando $a=-\frac{9}{8}$, há 2 raízes reais.

Quando $a<-\frac{9}{8}$, há 0 raízes reais.

L 104a KUMON Aplicações para Equações e Inequações

(50 pontos)

Ex.

Dada a equação cúbica $x^3-3x-a=0$, encontre os valores de a, de tal forma que a equação tenha as seguintes soluções:

(1) 2 raízes reais diferentes (1 raiz múltipla e 1 raiz simples)

(2) 1 raiz real positiva apenas.

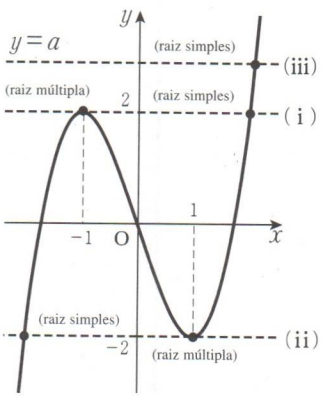
[Res.] De $x^3-3x=a$,

seja

$$\begin{cases} y=a & \cdots ① \\ y=x^3-3x & \cdots ② \end{cases}$$

De ②, $y'=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗



(1) Do gráfico,

$a=\pm$ [2] ☜ Quando ① e ② se tocam. (mostrado nos gráficos (i) e (ii))

(2) Do gráfico,

$a>$ [2] ☜ Quando ① e ② se interceptam em um ponto, com $x>0$. (mostrado no gráfico (iii))

Resposta: Todas as respostas, 2.

Nota: Quando $a<-2$, a equação tem 1 raiz apenas, mas é uma raiz negativa.

Definições:

Raiz múltipla — Dada uma equação polinominal $f(x)=0$ com um fator $(x-a)^n$, onde n é um inteiro >1, dizemos que $x=a$ é uma raiz múltipla.

Raiz simples — Uma raiz simples é uma raiz que não é uma raiz múltipla.

L I 04b

1. Dada a equação de 4º grau $x^4-2x^2-a=0$, encontre os valores de a, de tal forma que a equação tenha as seguintes soluções:

(1) 3 raízes reais diferentes (1 raiz múltipla e 2 raízes simples)

(2) 4 raízes reais.

[Res.] De $x^4-2x^2=a$,

seja

$$\begin{cases} y=a & \cdots ① \\ y=x^4-2x^2 & \cdots ② \end{cases}$$

De ②, $y'=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

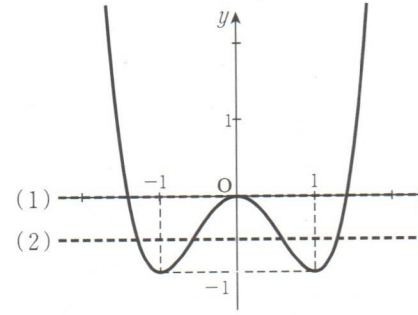
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

(1) Do gráfico,

$\boldsymbol{a=0}$

(2) Do gráfico,

$\boldsymbol{-1<a<0}$



L 105a KUMON Aplicações para Equações e Inequações

(50 pontos)

Ex.

Encontre o intervalo de valores da constante k para que a equação cúbica $x^3-6x^2+9x+k=0$ tenha as seguintes soluções:

(1) 2 raízes reais diferentes (1 raiz múltipla e 1 raiz simples)

(2) 3 raízes reais.

[Res.l]

Seja $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$k+4$	↘	k	↗

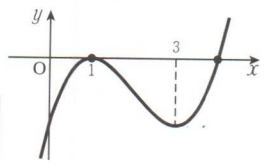
(1) Do gráfico,

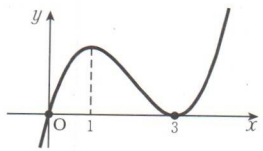
$f(1)=k+4=0 \quad \cdots ①$ ☜ Quando o valor máximo relativo $=0$.

ou

$f(3)=k=0 \quad \cdots ②$ ☜ Quando o valor mínimo relativo $=0$.

De ① e ②, $k=$ **−4**, **0**



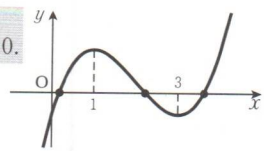


(2) Do gráfico,

$f(1)=k+4>0 \quad \cdots ①$ ☜ O valor máximo relativo precisa ser >0.

$f(3)=k<0 \quad \cdots ②$ ☜ O valor mínimo relativo precisa ser <0.

De ① e ②, **−4** $<k<$ **0**



Respostas: -4, 0 (em qualquer ordem) $\quad -4$, 0 (na ordem)

L105b

1. Usando o método mostrado na folha a, encontre o intervalo de valores da constante a para que a equação cúbica $x^3-3x-a=0$ tenha as seguintes soluções:

(1) 2 raízes reais diferentes (1 raiz múltipla e 1 raiz simples)

(2) 3 raízes reais.

[Res.] Seja $f(x)=x^3-3x-a$

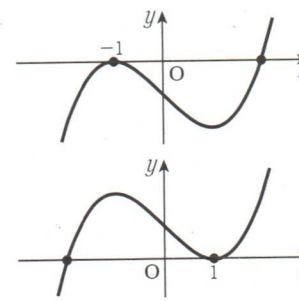
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$2-a$	↘	$-2-a$	↗

(1) Do gráfico,

$2-a=0$ ou $-2-a=0$

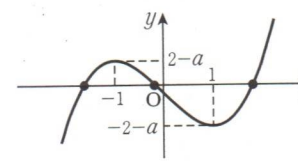
Portanto, $\boldsymbol{a=\pm 2}$



(2) Do gráfico,

$-2-a<0<2-a$

Portanto, $\boldsymbol{-2<a<2}$



Podemos também encontrar as raízes, obtendo os pontos de intersecção entre $y=x^3-3x$ e $y=a$. (Compare os exemplos em L104a. e L105b).

L 106a KUMON Aplicações para Equações e Inequações

(50 pontos)

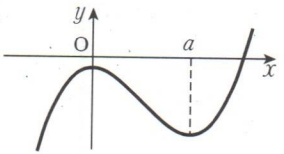
1. Para a equação $2x^3-3ax^2+a^3-2a=0$ (onde $a\neq 0$), encontre o intervalo de valores de a, para que a equação tenha 1 única raiz real.

[Res.] Seja $f(x)=2x^3-3ax^2+a^3-2a$

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

(i) Quando $a>0$,

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	a^3-2a	↘	$-2a$	↗



O mínimo relativo $(-2a)$ é negativo, então para existir apenas uma raiz, o máximo relativo (a^3-2a) precisa ser negativo também:

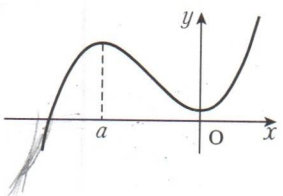
$a^3-2a=a(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})<0$

$a<-\sqrt{2},\ 0<a<\sqrt{2}$

Portanto, como $a>0$, $0<a<\sqrt{2}$

(ii) Quando $a<0$,

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-2a$	↘	a^3-2a	↗



O máximo relativo $(-2a)$ é positivo, então o mínimo relativo (a^3-2a) precisa ser positivo também:

$a(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})>0$

$-\sqrt{2}<a<0,\ a>\sqrt{2}$

Portanto, como $a<0$, $-\sqrt{2}<a<0$

De (i) e (ii), $\boldsymbol{-\sqrt{2}<a<0,\ 0<a<\sqrt{2}}$

2. Encontre o número de pontos de intersecção entre $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 1$ e $y = x - a$, considerando valores diferentes de a.

[Res.] De $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 1 = x - a$,

seja $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1 + a$

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}+a$	$\searrow$	$a-9$	$\nearrow$

Máximo relativo: $f(-1) = \frac{9}{2} + a$

Mínimo relativo: $f(2) = a - 9$

Portanto, determinando o número de pontos de intersecção:

(i) Quando $\frac{9}{2} + a < 0$, **ou seja, quando $a < -\frac{9}{2}$, há 1 ponto de intersecção.**

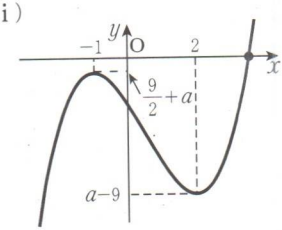
(ii) Quando $\frac{9}{2} + a = 0$, **ou seja, quando $a = -\frac{9}{2}$, há 2 pontos de intersecção.**

(iii) Quando $a - 9 < 0 < \frac{9}{2} + a$, **ou seja, quando $-\frac{9}{2} < a < 9$, há 3 pontos de intersecção.**

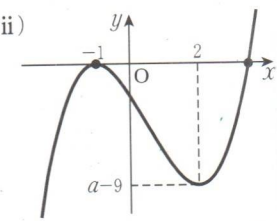
(iv) Quando $a - 9 = 0$, **ou seja, quando $a = 9$, há 2 pontos de intersecção.**

(v) Quando $a - 9 > 0$, **ou seja, quando $a > 9$, há 1 ponto de intersecção.**

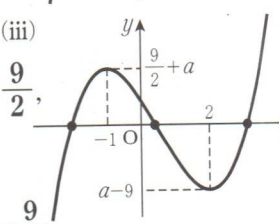
(i)



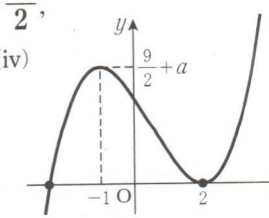
(ii)



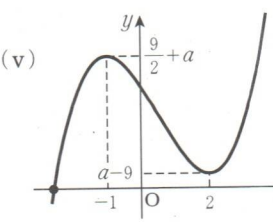
(iii)



(iv)



(v)



L 107a KUMON Aplicações para Equações e Inequações

(50 pontos)

Criando a tabela de variação (ou seja, a tabela que mostra como a função cresce e decresce) pode ajudar quando for provar as inequações.

Ex.

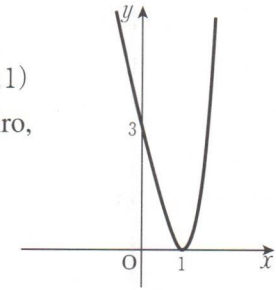
Prove que $x^4+3 \geq 4x$.

[Res.] Seja $f(x) = x^4+3-4x$

$f'(x) = 4x^3-4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$

Como $x^2+x+1>0$ é sempre verdadeiro,

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗



O valor mínimo de $f(x)$ é 0. ☞ $f(x)$ não pode ser um valor negativo.

Portanto, $f(x) \geq 0$

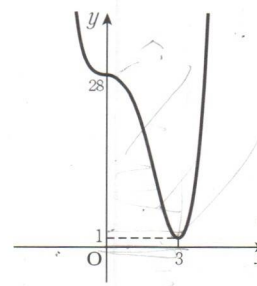
Assim, $x^4+3 \geq 4x$

1. Prove que $x^4+28>4x^3$.

[Res.] Seja $f(x) = x^4+28-4x^3$

$f'(x) = 4x^3-12x^2 = 4x^2(x-3)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	28	↘	1	↗



O valor mínimo de $f(x)$ é 1.

Portanto, $f(x)>0$

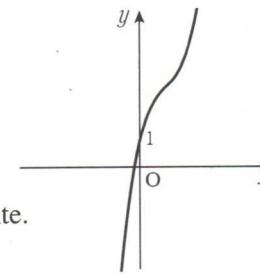
Assim, $x^4+28>4x^3$

Ex.

Prove que $x^3-3x^2+4x+1>0$, quando $x>0$.

[Res.] Seja $f(x)=x^3-3x^2+4x+1$

$$f'(x)=3x^2-6x+4$$
$$=3(x^2-2x+1)+1$$
$$=3(x-1)^2+1>0$$



Portanto, $f(x)$ é monotonicamente crescente.

De $f(0)=1$,

$f(x)>1$ para $x>0$.

Assim,

quando $x>0$, $x^3-3x^2+4x+1>0$

2. Prove que $x^3+7x+1>3x^2$, quando $x>0$.

[Res.] Seja $f(x)=x^3+7x+1-3x^2$

$$f'(x)=3x^2-6x+7$$
$$=3(x-1)^2+4>0$$

Portanto, $f(x)$ é monotonicamente crescente.

De $f(0)=1$,

$f(x)>1$ para $x>0$.

Assim,

quando $x>0$, $x^3+7x+1>3x^2$

L 108a KUMON Aplicações para Equações e Inequações

(50 pontos)

1. Prove que $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 > 3x^2+\frac{1}{8}$, quando $x>0$.

[Res.] Seja $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^3 - 3x^2 - \frac{1}{8}$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x + \frac{3}{4}$$

$$= 3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

Portanto, $f(x)$ é monotonicamente crescente.

Como $f(0) = 0$,

$f(x) > 0$ para $x > 0$.

Assim,

quando $x>0$, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 > 3x^2+\frac{1}{8}$

2. Prove que $2x^3-9x^2+12x+1>0$, quando $x>0$.

[Res.] Seja $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2-18x+12 \\ &= 6(x-2)(x-1) \end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+
$f(x)$	1	↗	6	↘	5	↗

Como $f(0)=1$ e $f(2)=5$,

$f(x)>0$ para $x>0$.

Assim,

quando $x>0$, $2x^3-9x^2+12x+1>0$

L 109a KUMON Aplicações para Equações e Inequações

(50 pontos)

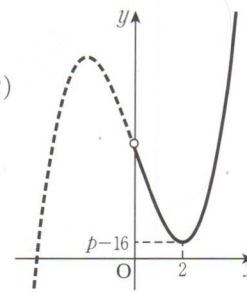
Ex.

Encontre as condições do número real p para que $x^3-12x+p>0$, onde $x>0$.

[Res.] Seja $f(x)=x^3-12x+p$

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$p-16$	↗



Portanto, de $p-16>0$,

$p>16$

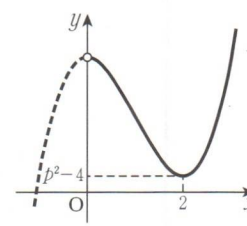
Na ordem para $f(x)>0$ ser verdadeiro, o valor mínimo relativo precisa ser maior que zero.

1. Encontre as condições do número real p para que $x^3-3x^2+p^2>0$, onde $x>0$.

[Res.] Seja $f(x)=x^3-3x^2+p^2$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	p^2-4	↗



Portanto, de $p^2-4>0$,

$\boldsymbol{p<-2,\ p>2}$

L109b

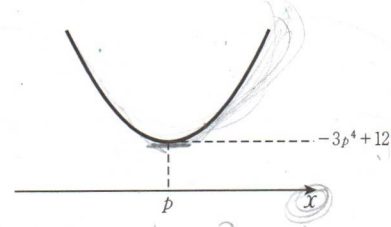
2. Encontre as condições do número real p para que $x^4-4p^3x+12>0$, para todos os números reais de x.

[Res.] Seja $f(x)=x^4-4p^3x+12$

$$f'(x)=4x^3-4p^3=4(x-p)(x^2+px+p^2)$$

$x^2+px+p^2=\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2+\frac{3}{4}p^2\geq 0$ para todos os números reais de x.

x	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-3(p^4-4)$	$\nearrow$



$f(p)=p^4-4p^4+12=-3(p^4-4)$

De $-3(p^4-4)>0$,

$(p^2+2)(p+\sqrt{2})(p-\sqrt{2})<0$

Portanto,

$$\boldsymbol{-\sqrt{2}<p<\sqrt{2}}$$

L I I Oa KUMON Aplicações para Equações e Inequações

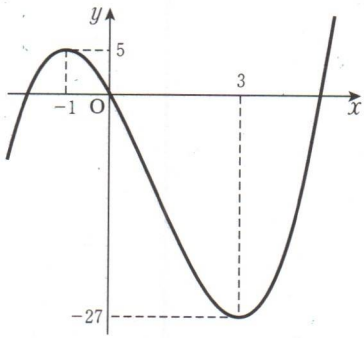
(50 pontos)

1. Encontre o intervalo de valores do número real m para que a equação $x^3-3x^2-9x-m=0$, tenha 2 raízes positivas diferentes e 1 raiz negativa.

[Res.] De $x^3-3x^2-9x=m$,

seja

$$\begin{cases} y=m & \cdots① \\ y=x^3-3x^2-9x & \cdots② \end{cases}$$



Portanto, de ②,

$y'=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	5	↘	-27	↗

Do gráfico,

$\boldsymbol{-27<m<0}$

L 110b

2. Prove que $\frac{1}{4}(x^4-1)+\frac{1}{2}(x^2-1)\le\frac{2}{3}(x^3-1)$, quando $0\le x\le 1$.

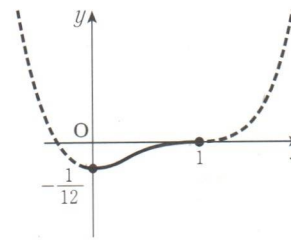
[Res.] Seja $f(x)=\frac{1}{4}(x^4-1)+\frac{1}{2}(x^2-1)-\frac{2}{3}(x^3-1)$

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}$$

$$f'(x)=x^3-2x^2+x$$

$$=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$$

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	$-\frac{1}{12}$	$\nearrow$	0



Do gráfico,

quando $0\le x\le 1$, $\frac{1}{4}(x^4-1)+\frac{1}{2}(x^2-1)\le\frac{2}{3}(x^3-1)$

LIIIa KUMON Integrais Definidas e Indefinidas

(7 pontos)

A função que, quando diferenciada, se torna $f(x)$ é chamada de ***integral indefinida*** de $f(x)$.

1. Complete as questões abaixo com relação as funções $F(x)$ e $f(x)$.

Ex.

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é a integral indefinida (ou antiderivada) de $f(x) = x^2$. ☜ De $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$

(1) $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ é a integral indefinida de $f(x) =$ $\boxed{x}$. ☜ $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$

(2) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ é a integral indefinida de $f(x) =$ $\boxed{x^3}$.

(3) $F(x) = x^2$ é a integral indefinida de $f(x) =$ $\boxed{2x}$.

2. Complete as questões abaixo com relação as funções $G(x)$ e $f(x)$.

(1) $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ é a integral indefinida de $f(x) =$ $\boxed{x^2}$. ☜ $\left(\frac{1}{3}x^3+1\right)' = x^2$

(2) $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4$ é a integral indefinida de $f(x) =$ $\boxed{x^2}$.

(3) $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + a$ é a integral indefinida de $f(x) =$ $\boxed{x^2}$.

3. Complete o quadro em branco.

Se $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, e C é uma constante, todas as funções $G(x)$ na questão 2 podem ser expressas como $G(x) = F(x) + C$.

Neste caso, todas as funções $G(x)$ acima, são integrais indefinidas de $f(x) =$ $\boxed{x^2}$.

Generalizando, se C é uma constante e $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, então $F(x) + C$ é chamada de integral indefinida de $f(x)$.

L I I I b

A integral indefinida de $f(x)$ é escrita como $\int f(x)dx$ e é lida como: "a integral de $f(x)$".

Quando uma das integrais indefinidas de $f(x)$ é $F(x)$,

$\int f(x)dx = F(x)+C$ (C é chamada ***constante de integração.***)

4. Procure o valor das seguintes integrais indefinidas.

Ex.

$\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3+C$ ☜ Para a integral indefinida não se esqueça de escrever $+C$.

(1) $\int x^3dx = \frac{1}{4}\boldsymbol{x^4+C}$ ☜ $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$

(2) $\int x^4dx = \frac{1}{5}\boldsymbol{x^5+C}$

(3) $\int x^5dx = \frac{1}{6}\boldsymbol{x^6+C}$

(4) $\int 2xdx = \boldsymbol{x^2+C}$ ☜ $(x^2)' = 2x$

(5) $\int 3x^2dx = \boldsymbol{x^3+C}$

(6) $\int 1dx = \boldsymbol{x+C}$

➢ Quando n é um inteiro positivo ou zero, então $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$

$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$ ☜ Do exemplo e questões (1), (2) e (3)

Portanto, podemos deduzir a seguinte fórmula para a integral indefinida de x^n.

Fórmula

Quando n é um inteiro positivo ou zero,

$\int x^ndx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (C é a constante de integração.)

Notação:

- O processo para encontrar integrais é chamado ***integração***.
- Na questão (6), $\int 1\,dx$ pode também ser escrita como $\int dx$.

L I I 2a KUMON Integrais Definidas e Indefinidas

(6 pontos)

Para calcular integrais indefinidas, podemos usar as seguintes propriedades:

Propriedades de Integrais Indefinidas

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k é uma constante.)
2. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

1. Procure o valor das seguintes integrais indefinidas.

Ex.

$\int 2x^2dx = \frac{2}{3}x^3 + C$ ☜ (Da propriedade 1.) $= 2\int x^2dx = 2\cdot\frac{1}{3}x^3 + C$

(1) $\int 3x^3dx = \frac{3}{4}\boldsymbol{x^4 + C}$

(2) $\int (-2x^2)dx = -\frac{2}{3}\boldsymbol{x^3 + C}$

(3) $\int 6x^2dx = \boldsymbol{2x^3 + C}$

(4) $\int ax^2dx = \frac{\boldsymbol{a}}{3}\boldsymbol{x^3 + C}$

(5) $\int 2t^2dt = \frac{2}{3}\boldsymbol{t^3 + C}$

(6) $\int 8t^3dt = \boldsymbol{2t^4 + C}$

(7) $\int (-3)dx = \boldsymbol{-3x + C}$

(8) $\int adx = \boldsymbol{ax + C}$

2. Procure o valor das seguintes integrais indefinidas.

Ex.

$\int(3x^2-4x+3)dx = x^3-2x^2+3x+C$ ☜ (Das propriedades **2.** e **3.** da face a) $= 3\int x^2dx-4\int xdx+3\int dx$

(Apenas uma única constante de integração C é necessária.)

(1) $\int(4x+3)dx = \mathbf{2x^2+3x+C}$

(2) $\int(x^2+3x+1)dx = \mathbf{\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x+C}$

(3) $\int(t^2-3t+1)dt = \mathbf{\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+t+C}$

(4) $\int(x^2+2x+a)dx = \mathbf{\frac{1}{3}x^3+x^2+ax+C}$

(5) $\int(px^3+qx^2+rx)dx = \mathbf{\frac{p}{4}x^4+\frac{q}{3}x^3+\frac{r}{2}x^2+C}$

(6) $\int(2x+a^2)dx = \mathbf{x^2+a^2x+C}$

(7) $\int(s^2-t^2)dt = \mathbf{s^2t-\frac{1}{3}t^3+C}$

(8) $\int(s^2-t^2)ds = \mathbf{\frac{1}{3}s^3-t^2s+C}$

L I I 3a KUMON Integrais Definidas e Indefinidas

(11 pontos)

Procure o valor das seguintes integrais indefinidas.

(1) $\int (x+1)(x+2)dx = \int (x^2+3x+2)dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

(2) $\int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2+4x+1)dx$

$$= \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$$

(3) $\int (x+1)^3 dx = \int (x^3+3x^2+3x+1)dx$

$$= \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

(4) $\int (x+1)(x^2-x+1)dx = \int (x^3+1)dx$

$$= \frac{1}{4}x^4 + x + C$$

(5) $\int (x+a)(x+b)dx = \int [x^2+(a+b)x+ab]dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{a+b}{2}x^2 + abx + C$$

(6) $\int (x^2+2)^2 dx = \int (x^4+4x^2+4)dx$

$$= \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 4x + C$$

(7) $\int x(x-1)^2 dx = \int (x^3-2x^2+x)dx$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

(8) $\int (t+2)^2(t+1)dt = \int (t^2+4t+4)(t+1)dt$

$$= \int (t^3+5t^2+8t+4)dt$$

$$= \frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{3}t^3 + 4t^2 + 4t + C$$

(9) $\int (x+1)^2 dx - \int (x-1)^2 dx = \int (x^2+2x+1)dx - \int (x^2-2x+1)dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right) + C$$

$$= 2x^2 + C$$

Solução Alternativa

Use a propriedade **3.** de L I I 2a, ao contrário

$= \int [(x+1)^2 - (x-1)^2]dx$

$= \int 4x dx = 2x^2 + C$

L I I 4a KUMON Integrais Definidas e Indefinidas

(20 pontos)

1. Encontre a função $F(x)$ que satisfaça as seguintes condições.

Ex.

$F'(x) = x^2 + 3x, \quad F(1) = 2$

[Res.] $F(x) = \int (x^2 + 3x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$

De $F(1) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + C = 2, \quad C = \frac{1}{6}$

Portanto, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}$

(1) $F'(x) = -x, \quad F(0) = -1$

[Res.] $F(x) = \int (-x)dx = -\frac{1}{2}x^2 + C$

$F(0) = C = -1$

Portanto, $\boldsymbol{F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1}$

(2) $F'(x) = x^3 - 3x, \quad F(1) = 0$

[Res.] $F(x) = \int (x^3 - 3x)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + C$

De $F(1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + C = 0, \quad C = \frac{5}{4}$

Portanto, $\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}}$

2. Encontre a função $F(x)$ que satisfaça as seguintes condições, quando $F'(x)=f(x)$ é verdadeira.

(1) $f(x)=-2x+3$, $F(1)=0$

[Res.] $F(x)=\int(-2x+3)dx=-x^2+3x+C$

De $F(1)=-1+3+C=0$, $C=-2$

Portanto, $\boldsymbol{F(x)=-x^2+3x-2}$

(2) $f(x)=x^2+3x$, $F(1)=\frac{4}{3}$

[Res.] $F(x)=\int(x^2+3x)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+C$

De $F(1)=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+C=\frac{4}{3}$, $C=-\frac{1}{2}$

Portanto, $\boldsymbol{F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}}$

(3) $f(x)=3x^2+1$, $F(0)=4$

[Res.] $F(x)=\int(3x^2+1)dx=x^3+x+C$

$F(0)=C=4$

Portanto, $\boldsymbol{F(x)=x^3+x+4}$

L I I 5a KUMON Integrais Definidas e Indefinidas

(50 pontos)

Ex.

Dado que $f(x)$ tem um valor máximo de 5 em $x=2$, e $f'(x)=-2x+a$, encontre $f(x)$.

[Res.] $f(x)=\int(-2x+a)dx$

$=-x^2+ax+C$

$=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+C$ ☜ Portanto, $f(x)$ é uma função quadrática com vértice $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}+C\right)$.

De $\frac{a}{2}=2$, $\frac{a^2}{4}+C=5$ ☜ A coordenada x do vértice é 2. A coordenada y do vértice é 5.

$a=4$, $C=1$

Portanto, $f(x)=-x^2+4x+1$

1. Dado que $f(x)$ tem um valor máximo de 3 em $x=2$, e $f'(x)=-4x+a$, encontre $f(x)$.

[Res.] $f(x)=\int(-4x+a)dx$

$=-2x^2+ax+C$

$=-2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}+C$

De $\frac{a}{4}=2$, $\frac{a^2}{8}+C=3$

$a=8$, $C=-5$

Portanto, $\boldsymbol{f(x)=-2x^2+8x-5}$

2. Dado que $f(x)$ tem um valor mínimo de -1 em $x=1$, e $f'(x)=x+a$, encontre $f(x)$.

[Res.] $f(x)=\int(x+a)dx$

$$=\frac{1}{2}x^2+ax+C$$

$$=\frac{1}{2}(x+a)^2-\frac{1}{2}a^2+C$$

De $a=-1$, $-\frac{1}{2}a^2+C=-1$

$$C=-\frac{1}{2}$$

Portanto, $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}}$

L116a KUMON Integrais Definidas e Indefinidas

(33 pontos)

Ex.

A curva $y = f(x)$ passa pelo ponto $(1, 1)$. Encontre $f(x)$ quando a inclinação da tangente em qualquer ponto (x, y) da curva é $3x^2 + 2$.

[Res.] De $f'(x) = 3x^2 + 2$,

$$f(x) = \int (3x^2 + 2)dx = x^3 + 2x + C$$

De $f(1) = 1 + 2 + C = 1$, ☜ Substituindo $(1, 1)$ em $y = f(x)$.

$C = -2$

Portanto, $f(x) = x^3 + 2x - 2$

1. A curva $y = f(x)$ passa pelo ponto $(1, 2)$. Encontre $f(x)$ quando a inclinação da tangente em qualquer ponto (x, y) da curva é $3x^2$.

[Res.] De $f'(x) = 3x^2$,

$$f(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

De $f(1) = 1 + C = 2$,

$C = 1$

Portanto, $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 1}$

Nota: A inclinação da curva em qualquer ponto é igual a inclinação da tangente naquele ponto. Para encontrar a equação da curva por uma fórmula para a inclinação, integre.

2. A curva $y=f(x)$ cruza o eixo y no ponto $(0,\ 7)$. Encontre $f(x)$ quando a inclinação da tangente em qualquer ponto $(x,\ y)$ da curva é $4x-8$.

[Res.] De $f'(x)=4x-8$,

$$f(x)=\int(4x-8)dx=2x^2-8x+C$$

$$f(0)=C=7$$

Portanto, $\boldsymbol{f(x)=2x^2-8x+7}$

3. A curva $y=f(x)$ passa pelo ponto $(2,\ -1)$. Encontre $f(x)$ quando a inclinação da tangente em qualquer ponto $(x,\ y)$ da curva é $-3x^2+2x-1$.

[Res.] De $f'(x)=-3x^2+2x-1$,

$$f(x)=\int(-3x^2+2x-1)dx$$

$$f(x)=-x^3+x^2-x+C$$

De $f(2)=-8+4-2+C=-1$,

$$C=5$$

Portanto, $\boldsymbol{f(x)=-x^3+x^2-x+5}$

L117a KUMON Integrais Definidas e Indefinidas

(16 pontos)

1. Dado que a integral indefinida da função $f(x) = 2x+1$ é $F(x) = \int (2x+1)dx = x^2+x+C$, encontre o valor de $F(2)-F(1)$ quando a constante de integração C assume os seguintes valores.

Ex.

Quando $C=0$

[Res.] $F(x) = x^2+x$ ☜ Substituindo 0 em C.

$F(2)-F(1) = (2^2+2)-(1^2+1) = 4$

(1) Quando $C=1$

[Res.] $F(x) = \boldsymbol{x^2+x+1}$

$F(2)-F(1) = (2^2+2+1)-(1^2+1+1) = \mathbf{4}$

(2) Quando $C=2$

[Res.] $F(x) = x^2+x+2$

$F(2)-F(1) = (2^2+2+2)-(1^2+1+2) = \mathbf{4}$

(3) Quando $C=-1$

[Res.] $F(x) = x^2+x-1$

$F(2)-F(1) = (2^2+2-1)-(1^2+1-1) = \mathbf{4}$

➢ Das questões (1), (2) e (3), podemos observar que $F(2)-F(1)$, da integral indefinida $F(x) = x^2+x+C$ da função $f(x) = 2x+1$, tem o mesmo valor independentemente da constante de integração C.

Generalizando, quando a integral indefinida de $f(x)$ é $F(x)$, então $F(b)-F(a)$ é chamada de ***integral definida*** de $f(x)$ de a para b, e é escrita como $\int_a^b f(x)\,dx$.

Dado que a integral indefinida de $f(x)$ é $F(x)$, então $F(b)-F(a)$ pode ser escrito como $\Big[F(x)\Big]_a^b$ e podemos fazer a seguinte definição:

Definição de Integral Definida

Quando a integral indefinida de $f(x)$ é $F(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

2. Procure o valor das seguintes integrais definidas.

Ex.

$$\int_1^2 (2x+1)dx = \Big[x^2+x\Big]_1^2 = 6-2 = 4$$

$F(2) = 2^2+2 = 6$
$F(1) = 1^2+1 = 2$

(1) $\int_1^3 (2x+1)dx = \Big[x^2+x\Big]_1^3 = 12-2 = \mathbf{10}$

(2) $\int_0^1 (-2x-1)dx = \Big[-x^2-x\Big]_0^1 = -2-0 = \mathbf{-2}$

(3) $\int_{-2}^1 (x+1)dx = \Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-2}^1 = \frac{3}{2}-0 = \mathbf{\frac{3}{2}}$

O processo de procura do valor da integral definida $\int_a^b f(x)dx$, é chamado ***integrando de a para b***.

L I I 8a KUMON Integrais Definidas e Indefinidas

(9 pontos)

Definição de Integral Definida

Quando a integral indefinida de $f(x)$ é $F(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_0^1 x^2 dx = \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{3}}$

(2) $\int_0^1 (-x^2)dx = \Big[-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \mathbf{-\frac{1}{3}}$

(3) $\int_0^{-1} x^2 dx = \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^{-1} = \mathbf{-\frac{1}{3}}$

(4) $\int_{-1}^1 x^2 dx = \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \Big(-\frac{1}{3}\Big) = \mathbf{\frac{2}{3}}$

(5) $\int_a^a t^2 dt = \Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_a^a = \mathbf{0}$

(6) $\int_1^a 2x dx = \Big[x^2\Big]_1^a = \mathbf{a^2 - 1}$

L118b

(7) $\int_0^1 (x^2+2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1 = \frac{1}{3}+2 = \mathbf{\frac{7}{3}}$

(8) $\int_1^2 (x^2+2x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right) = \mathbf{\frac{16}{3}}$

(9) $\int_1^2 (t^2+3)dt = \left[\frac{1}{3}t^3+3t\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}+6\right)-\left(\frac{1}{3}+3\right) = \mathbf{\frac{16}{3}}$

(10) $\int_{-1}^3 (4x-x^2)dx = \left[2x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^3 = (18-9)-\left(2+\frac{1}{3}\right) = \mathbf{\frac{20}{3}}$

(11) $\int_0^3 (x^2-2x+5)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+5x\right]_0^3 = 9-9+15 = \mathbf{15}$

L I I 9a KUMON Integrais Definidas e Indefinidas

(16 pontos)

1. Procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_{-2}^{1}(x-1)(x+1)dx = \int_{-2}^{1}(x^2-1)dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(-\frac{8}{3}+2\right)$$

$$= \mathbf{0}$$

(2) $\int_{-1}^{3}x(3x-2)dx = \int_{-1}^{3}(3x^2-2x)dx = \left[x^3-x^2\right]_{-1}^{3}$

$$= (27-9)-(-1-1) = \mathbf{20}$$

(3) $\int_{1}^{3}(x+2)^2dx = \int_{1}^{3}(x^2+4x+4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x\right]_{1}^{3}$

$$= (9+18+12)-\left(\frac{1}{3}+2+4\right)$$

$$= \frac{\mathbf{98}}{\mathbf{3}}$$

(4) $\int_{0}^{2}(t-2)^2dt = \int_{0}^{2}(t^2-4t+4)dt$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t\right]_{0}^{2} = \frac{8}{3}-8+8 = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$$

(5) $\int_{0}^{2}x^2(x+1)dx = \int_{0}^{2}(x^3+x^2)dx$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2} = 4+\frac{8}{3} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}}$$

L119b

2. Encontre a função $f(x)$ que satisfaça as seguintes condições.

Ex.

$f'(x)=2x-1,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}$

[Res.] $f(x)=\int(2x-1)dx=x^2-x+C$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^2-x+C)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+Cx\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C=\frac{5}{6}$$

Portanto, $C=1$

Então, $f(x)=x^2-x+1$

(1) $f'(x)=4x+2,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}$

[Res.] $f(x)=\int(4x+2)dx=2x^2+2x+C$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(2x^2+2x+C)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3+x^2+Cx\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}+1+C=\frac{2}{3}$$

Portanto, $C=-1$

Então, $\boldsymbol{f(x)=2x^2+2x-1}$

L I 20a KUMON Integrais Definidas e Indefinidas

(20 pontos)

1. Entre as integrais indefinidas de $3x^2+4x$ obter aquela que resulta em -2 quando $x=1$.

[Res.] Seja $F(x)$ a integral indefinida,

$$F(x)=\int(3x^2+4x)dx=x^3+2x^2+C$$

De $F(1)=1+2+C=-2$,

$C=-5$

Portanto, a integral indefinida é $\boldsymbol{x^3+2x^2-5}$.

2. A curva $y=f(x)$ passa pelo ponto $(-2,\ -5)$. Encontre $f(x)$ quando a inclinação da tangente em qualquer ponto $(x,\ y)$ da curva é $6x^2-2x-3$.

[Res.] De $f'(x)=6x^2-2x-3$,

$$f(x)=\int(6x^2-2x-3)dx$$
$$=2x^3-x^2-3x+C$$

De $f(-2)=-16-4+6+C=-5$,

$C=9$

Portanto, $\boldsymbol{f(x)=2x^3-x^2-3x+9}$

3. Procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_1^2 (4x^3-6x^2)dx = \left[x^4-2x^3\right]_1^2 = (16-16)-(1-2)$

$= \mathbf{1}$

(2) $\int_1^4 (x-1)^2 dx = \int_1^4 (x^2-2x+1)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^4$

$= \left(\frac{64}{3}-16+4\right)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)$

$= \mathbf{9}$

(3) $\int_{-a}^{a} (a^2-t^2)dt = \left[a^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-a}^{a}$

$= \left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)-\left(-a^3+\frac{1}{3}a^3\right)$

$= \mathbf{\frac{4}{3}a^3}$

L I 2 I a KUMON Integrais Definidas I

(20 pontos)

As propriedades de integrais indefinidas do L I I 2 são verdadeiras também para integrais definidas.

Propriedades de Integrais Definidas I

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k é uma constante.)
2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

1. Procure o valor da seguinte integral definida, usando dois métodos diferentes.

$$I = \int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 1)dx$$

(i) $$I = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(\frac{8}{3} - 6 + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 1\right)$$
$$= \frac{3}{2}$$

(ii) $$I = \int_{-1}^{2} x^2 dx - \int_{-1}^{2} 3x dx + \int_{-1}^{2} dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2} + \left[x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{1}{3}(8+1) - \frac{3}{2}(4-1) + 3$$
$$= \frac{3}{2}$$

2. Procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_{-1}^{2}(x^2-5x+4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}-\left[\frac{5}{2}x^2\right]_{-1}^{2}+\left[\,4x\,\right]_{-1}^{2}$

$=\frac{1}{3}(8+1)-\frac{5}{2}(4-1)+4(2+1)$

$=\mathbf{\frac{15}{2}}$

(2) $\int_{-1}^{3}(-x^2+5x-3)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}+\left[\frac{5}{2}x^2\right]_{-1}^{3}-\left[\,3x\,\right]_{-1}^{3}$

$=-\frac{1}{3}(27+1)+\frac{5}{2}(9-1)-3(3+1)$

$=\mathbf{-\frac{4}{3}}$

(3) $\int_{0}^{3}(2x^2-2x-5)dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{3}-\left[\,x^2\,\right]_{0}^{3}-\left[\,5x\,\right]_{0}^{3}$

$=18-9-15$

$=\mathbf{-6}$

L I22a KUMON Integrais Definidas I

(14 pontos)

Procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_{-1}^{2}(3x^2-4x+3)dx=\left[x^3-2x^2+3x\right]_{-1}^{2}$

$=(8-8+6)-(-1-2-3)$

$=\mathbf{12}$

(2) $\int_{-1}^{2}(2x^2+3x-5)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-5x\right]_{-1}^{2}$

$=\left(\frac{16}{3}+6-10\right)-\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+5\right)$

$=\mathbf{-\frac{9}{2}}$

(3) $\int_{2}^{-1}(x^3-2x+1)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2+x\right]_{2}^{-1}$

$=\left(\frac{1}{4}-1-1\right)-(4-4+2)$

$=\mathbf{-\frac{15}{4}}$

(4) $\int_{-1}^{3}(x+1)(3-x)dx=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}$

$=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)$

$=\mathbf{\frac{32}{3}}$

(5) $\int_{-2}^{1}(y+2)^2dy=\int_{-2}^{1}(y^2+4y+4)dy=\left[\frac{1}{3}y^3+2y^2+4y\right]_{-2}^{1}$

$=\left(\frac{1}{3}+2+4\right)-\left(-\frac{8}{3}+8-8\right)$

$=\mathbf{9}$

(6) $\int_{-2}^{2}(x+1)(x-2)dx=\int_{-2}^{2}(x^2-x-2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{2}$

$=\left(\frac{8}{3}-2-4\right)-\left(-\frac{8}{3}-2+4\right)$

$=\mathbf{-\frac{8}{3}}$

(7) $\int_0^1(x+1)^2dx-\int_0^1(x-1)^2dx$

$=\int_0^1[(x+1)^2-(x-1)^2]dx$

$=\int_0^1 4xdx$

$=\left[2x^2\right]_0^1$

$=\mathbf{2}$

Desde que os limites inferior e superior de ambas integrais sejam os mesmos, tente encontrar um método mais fácil para avaliar
Use a propriedade **3.** do L I 2 I a, ao contrário.

L 123a KUMON Integrais Definidas I

(7 pontos)

1. Procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_0^3 dx = \left[x \right]_0^3 = \mathbf{3}$

(2) $\int_{-3}^3 dx = \left[x \right]_{-3}^3 = 3-(-3) = \mathbf{6}$

(3) $\int_0^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^3 = \mathbf{\frac{9}{2}}$

(4) $\int_{-3}^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{-3}^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = \mathbf{0}$

(5) $\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \mathbf{9}$

(6) $\int_{-3}^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^3 = 9-(-9) = \mathbf{18}$

(7) $\int_0^3 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 = \mathbf{\frac{81}{4}}$

(8) $\int_{-3}^3 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_{-3}^3 = \frac{81}{4} - \frac{81}{4} = \mathbf{0}$

2. Complete os quadros em branco.

(i) De (4) e (8) acima, quando n é 1 ou 3, $\int_{-3}^3 x^n dx = \boxed{\mathbf{0}}$.

(ii) De (1), (2) e (5), (6) acima, quando n é 0 ou 2,

$\int_{-3}^3 x^n dx = 2\int_{\boxed{0}}^3 x^n dx.$

Propriedade de Integrais Definidas II

4. $\int_{-a}^{a} x^n dx = \begin{cases} 0 & (\text{Quando } n \text{ é } 1,\ 3,\ 5,\ \ldots) \\ 2\int_{0}^{a} x^n dx & (\text{Quando } n \text{ é } 0,\ 2,\ 4,\ \ldots) \end{cases}$

3. Usando a propriedade de integral definida acima, procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2-2x+1)dx = \int_{-1}^{1}x^3dx+3\int_{-1}^{1}x^2dx-2\int_{-1}^{1}xdx+\int_{-1}^{1}dx$

$= 6\int_{0}^{1}x^2dx+\boxed{2\int_{0}^{1}dx}$

$= 6\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+2\left[x\right]_0^1 = 2+2 = \mathbf{4}$

(2) $\int_{-3}^{3}(5x^3+2x^2+6x-1)dx = 5\int_{-3}^{3}x^3dx+2\int_{-3}^{3}x^2dx+6\int_{-3}^{3}xdx-\int_{-3}^{3}dx$

$= 4\int_{0}^{3}x^2dx-2\int_{0}^{3}dx$

$= 4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3-2\left[x\right]_0^3 = 36-6 = \mathbf{30}$

(3) $\int_{-1}^{1}(x^3-1)dx = \int_{-1}^{1}x^3dx-\int_{-1}^{1}dx$

$= -2\int_{0}^{1}dx = -2\left[x\right]_0^1 = \mathbf{-2}$

(4) $\int_{-a}^{a}(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)dx$

$= A\int_{-a}^{a}x^4dx+B\int_{-a}^{a}x^3dx+C\int_{-a}^{a}x^2dx+D\int_{-a}^{a}xdx+E\int_{-a}^{a}dx$

$= 2A\int_{0}^{a}x^4dx+2C\int_{0}^{a}x^2dx+2E\int_{0}^{a}dx$

$= 2A\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^a+2C\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a+2E\left[x\right]_0^a = \mathbf{\frac{2}{5}Aa^5+\frac{2}{3}Ca^3+2Ea}$

L I 24a KUMON Integrais Definidas I

(14 pontos)

1. Procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_1^3 (x-1)(x-3)dx = \int_1^3 (x^2-4x+3)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$

$= (9-18+9) - \left(\frac{1}{3}-2+3\right)$

$= -\frac{4}{3}$

(2) $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$

$= \int_\alpha^\beta [x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^\beta - (\alpha+\beta)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^\beta + \alpha\beta\left[x\right]_\alpha^\beta$

$= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3) - \frac{1}{2}(\ \alpha+\beta\ )(\beta^2-\alpha^2) + \boxed{\alpha\beta}(\beta-\alpha)$

$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)[2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2) - 3(\ \beta+\alpha\ )^2 + 6\boxed{\alpha\beta}]$

$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\ -\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2\ )$

$= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

2. Complete os quadros em branco.

Compare (1) e (2) acima.

Usando o resultado de (2), e tendo $\alpha = 1$ e $\beta = 3$ podemos encontrar a resposta para (1) como segue:

$\int_1^3 (x-1)(x-3)dx = -\frac{1}{6}(\boxed{\ 3\ } - \boxed{\ 1\ })^3 = -\frac{4}{3}$

Propriedade de Integrais Definidas III

5. $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

3. Usando a propriedade de integrais definidas acima, procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx=-\frac{1}{6}[1-(-2)]^3=\mathbf{-\frac{9}{2}}$

(2) $\int_{1}^{3}(x^2-4x+3)dx=\int_{1}^{3}(x-1)(x-3)dx=-\frac{1}{6}(3-1)^3=\mathbf{-\frac{4}{3}}$

(3) $\int_{-3}^{\frac{1}{2}}(2x-1)(x+3)dx=\boxed{\mathbf{2}}\int_{-3}^{\frac{1}{2}}\left(x-\boxed{\mathbf{\frac{1}{2}}}\right)(x+3)dx$

$=2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left[\frac{1}{2}-(-3)\right]^3=\mathbf{-\frac{343}{24}}$

(4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{3}(x-3)(2x+1)dx=2\int_{-\frac{1}{2}}^{3}(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$

$=2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left[3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^3=\mathbf{-\frac{343}{24}}$

L125a KUMON Integrais Definidas I

(33 pontos)

Procure o valor das seguintes integrais definidas. Assuma que α e β são duas raízes reais distintas da integral, e $\alpha<\beta$.

Ex.

$\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-2x-1)dx$

[Res.] $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$ ☜ Da relação entre a raiz e coeficiente.

De $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8$,

$\beta-\alpha=2\sqrt{2}$ ☜ Como $\alpha<\beta$, $-2\sqrt{2}$ é uma solução inadequada.

Portanto,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-2x-1)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3=-\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

(1) $\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-3x+1)dx$

[Res.] $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

De $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5$,

$\beta-\alpha=\sqrt{5}$

Portanto,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-3x+1)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\sqrt{5})^3=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\sqrt{\mathbf{5}}$$

Em qualquer integral, chama-se a função que será integrada de ***integrando***.
No exemplo acima, o integrando é x^2-2x-1.

(2) $\int_{\alpha}^{\beta}(x^2+2x-5)dx$

[Res.] $\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-5$

De $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=24,$

$\beta-\alpha=2\sqrt{6}$

Portanto,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x^2+2x-5)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(2\sqrt{6})^3=\mathbf{-8\sqrt{6}}$$

(3) $\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-2ax+a^2-3)dx$

[Res.] $\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a^2-3$

De $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(2a)^2-4(a^2-3)=12,$

$\beta-\alpha=2\sqrt{3}$

Portanto,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-2ax+a^2-3)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(2\sqrt{3})^3=\mathbf{-4\sqrt{3}}$$

L126a KUMON Integrais Definidas I

(11 pontos)

1. Procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_0^2 (2x+3)dx = \left[x^2+3x\right]_0^2 = 4+6 = \mathbf{10}$

(2) $\int_2^0 (2x+3)dx = \left[x^2+3x\right]_2^0 = -(4+6) = \mathbf{-10}$

(3) $\int_{-1}^0 (x^2-2x+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{-1}^0 = -\left(-\frac{1}{3}-1-1\right) = \mathbf{\frac{7}{3}}$

(4) $\int_0^3 (x^2-2x+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^3 = 9-9+3 = \mathbf{3}$

(5) $\int_{-1}^3 (x^2-2x+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{-1}^3 = (9-9+3)-\left(-\frac{1}{3}-1-1\right)$

$= \mathbf{\frac{16}{3}}$

2. Complete os quadros em branco.

(i) De (1) e (2) acima, $\int_2^0 (2x+3)dx = -\int_{\boxed{0}}^{\boxed{2}} (2x+3)dx$

(ii) De (3)~(5) acima,

$$\int_{-1}^3 (x^2-2x+1)dx = \int_{-1}^{\boxed{0}} (x^2-2x+1)dx + \int_{\boxed{0}}^3 (x^2-2x+1)dx$$

Propriedades de Integrais Definidas IV

6. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

7. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

3. Usando as propriedades de integrais definidas acima, procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_{-1}^{0}(2x^2-x)dx+\int_0^2(2x^2-x)dx$

$= \int_{-1}^{2}(\ \mathbf{2x^2-x}\ )dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{16}{3}-2\right)-\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{\frac{9}{2}}$

(2) $\int_0^1(x^2-x+1)dx-\int_2^1(x^2-x+1)dx$

$=\int_0^1(x^2-x+1)dx+\int_1^2(x^2-x+1)dx$

$=\int_0^2(x^2-x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^2=\frac{8}{3}-2+2=\mathbf{\frac{8}{3}}$

(3) $\int_0^2(x^2-4x+3)dx-\int_0^{-1}(x^2-4x+3)dx$

$=\int_0^2(x^2-4x+3)dx+\int_{-1}^0(x^2-4x+3)dx$

$=\int_{-1}^2(x^2-4x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_{-1}^2=\left(\frac{8}{3}-8+6\right)-\left(-\frac{1}{3}-2-3\right)=\mathbf{6}$

L I 27a KUMON Integrais Definidas I

(50 pontos)

1. Procure o valor das seguintes integrais definidas.

Ex.

$\int_0^2 |x^2-1|dx$

[Res.] De $x^2-1=(x+1)(x-1)$,

$$|x^2-1| = \begin{cases} -x^2+1 & (0 \le x \le 1) \\ x^2-1 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

$x^2-1 \le 0$ quando $0 \le x \le 1$

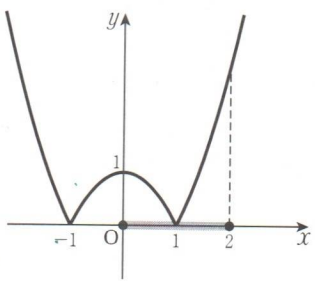
$x^2-1 \ge 0$ quando $1 \le x \le 2$

$$\int_0^2 |x^2-1|dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2+1)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3}+1\right)+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right) = 2$$



(1) $\int_0^2 |x^2+x-2|dx$

[Res.] De $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$,

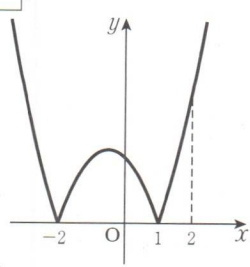
$$|x^2+x-2| = \begin{cases} -x^2-x+2 & (0 \le x \le 1) \\ x^2+x-2 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

$$\int_0^2 |x^2+x-2|dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2-x+2)dx + \int_1^2 (x^2+x-2)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)+\left(\frac{8}{3}+2-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right) = 3$$



L I 2 7 b

(2) $\int_{-2}^{1}|x(x-1)(x-2)|dx$

[Res.] $|x(x-1)(x-2)|=\begin{cases}-x(x-1)(x-2) & (-2\leq x\leq 0)\\ x(x-1)(x-2) & (0\leq x\leq 1)\end{cases}$

Portanto,

$$\int_{-2}^{1}|x(x-1)(x-2)|dx$$

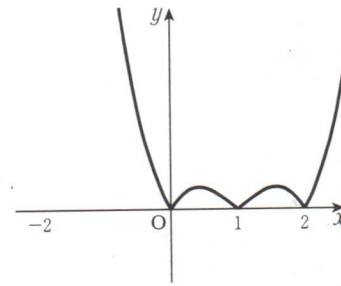
$$=\int_{-2}^{0}[-x(x-1)(x-2)]dx+\int_{0}^{1}x(x-1)(x-2)dx$$

$$=-\int_{-2}^{0}(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=(4+8+4)+\left(\frac{1}{4}-1+1\right)$$

$$=\frac{65}{4}$$



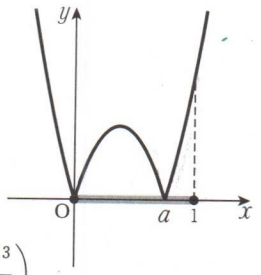
L128a KUMON Integrais Definidas I

(50 pontos)

Ex.

Procure o valor da integral $I=\int_0^1 |x(x-a)|dx$ quando $0<a<1$.

[Res.] $|x(x-a)| = \begin{cases} -x(x-a) & (0 \le x \le a) \\ x(x-a) & (a \le x \le 1) \end{cases}$



$$I=\int_0^a [-x(x-a)]dx+\int_a^1 x(x-a)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_a^1$$

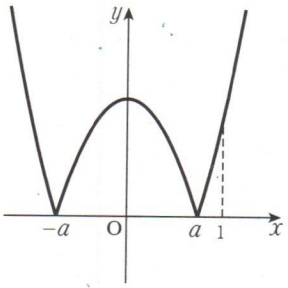
$$=\left(-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}\right)$$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

1. Procure o valor da integral $I=\int_0^1 |x^2-a^2|dx$ quando $0<a<1$.

[Res.] De $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$,

$$|x^2-a^2| = \begin{cases} -x^2+a^2 & (0 \le x \le a) \\ x^2-a^2 & (a \le x \le 1) \end{cases}$$



$$I=\int_0^a (-x^2+a^2)dx+\int_a^1 (x^2-a^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+a^2x\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_a^1$$

$$=\left(-\frac{a^3}{3}+a^3\right)+\left(\frac{1}{3}-a^2\right)-\left(\frac{a^3}{3}-a^3\right)$$

$$=\frac{4}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}$$

2. Procure o valor da integral $I=\int_0^2 |x(x-a)|dx$ quando $a>0$.

(i) Quando $0<a<2$,

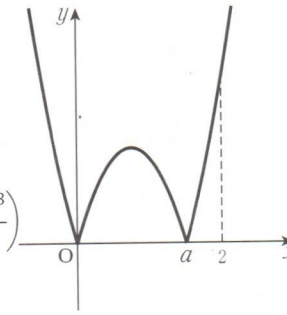
[Res.] $|x(x-a)|=\begin{cases} -x(x-a) & (0\le x\le a) \\ x(x-a) & (a\le x\le 2) \end{cases}$

$$I=\int_0^a [-x(x-a)]dx+\int_a^2 x(x-a)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_a^2$$

$$=\left(-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}\right)+\left(\frac{8}{3}-2a\right)-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{a^3}{3}-2a+\frac{8}{3}}$$



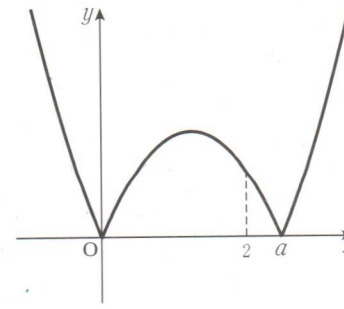
(ii) Quando $a\ge 2$,

[Res.] $|x(x-a)|=-x(x-a)$

$$I=\int_0^2 [-x(x-a)]dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=\boldsymbol{-\frac{8}{3}+2a}$$



L129a KUMON Integrais Definidas I

(50 pontos)

Ex.

Encontre o valor mínimo de $F(a)=\int_0^1 |x(x-a)|dx$ quando $a>0$.

[Res.]

(i) Quando $0<a<1$,

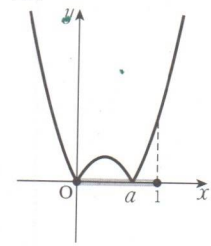
$$F(a)=\int_0^{\boxed{a}}[-x(x-a)]dx+\int_{\boxed{a}}^1 x(x-a)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^{\boxed{a}}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_{\boxed{a}}^1$$

$$=\left(-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}\right)$$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

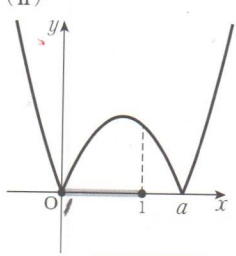
(i)



$$F'(a)=a^2-\frac{1}{2}=\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

a	0	⋯	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	⋯	1
$F'(a)$	／	−	0	+	／
$F(a)$	／	↘	mínimo relativo	↗	／

(ii)



Portanto, quando $0<a<1$, o valor mínimo é $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{6}}$.

(ii) Quando $a\geq 1$,

$$F(a)=-\int_0^1 x(x-a)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{a}{2}$$

Considerando o intervalo de valores $a\geq 1$, esta expressão é menor quando $a=1$.

Portanto, quando $a\geq 1$, o valor mínimo é $F(1)=\boxed{\frac{1}{6}}$.

De (i) e (ii), o valor mínimo total é $\boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{6}}$, quando $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Respostas: na ordem a, a, a, a, $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

L 129b

1. Encontre o valor mínimo de $F(a)=\int_0^2 |x^2-a^2|dx$ quando $a>0$.

[Res.]

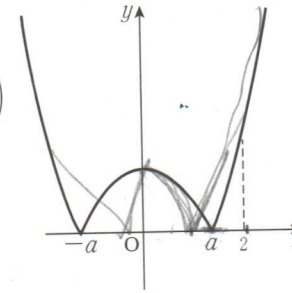
(i) Quando $0<a<2$,

$$F(a)=\int_0^a [-(x^2-a^2)]dx+\int_a^2 (x^2-a^2)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_a^2$$

$$=\left(-\frac{a^3}{3}+a^3\right)+\left(\frac{8}{3}-2a^2\right)-\left(\frac{a^3}{3}-a^3\right)$$

$$=\frac{4}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}$$



$F'(a)=4a^2-4a=4a(a-1)$

a	0	⋯	1	⋯	2
$F'(a)$	／	−	0	+	／
$F(a)$	／	↘	mínimo relativo	↗	／

Portanto, quando $0<a<2$, o valor mínimo é

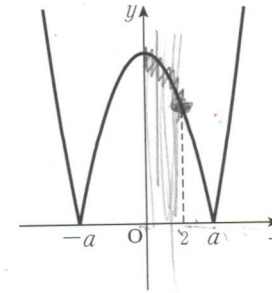
$$F(1)=\frac{4}{3}-2+\frac{8}{3}=2.$$

(ii) Quando $a\geq 2$,

$$F(a)=\int_0^2 [-(x^2-a^2)]dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_0^2$$

$$=-\frac{8}{3}+2a^2$$



Portanto, quando $a\geq 2$, o valor mínimo é

$$F(2)=-\frac{8}{3}+8=\frac{16}{3}.$$

De (i) e (ii), **o valor mínimo total é 2, quando $a=1$.**

L 130a KUMON Integrais Definidas I

(20 pontos)

1. Procure o valor das seguintes integrais definidas.

(1) $\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx = -\int_{-2}^{1}(x-1)(x+2)dx = \frac{1}{6}(1+2)^3 = \frac{9}{2}$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

(2) $\int_{-2}^{2}(4x^3-3x^2+2x-1)dx$

$$=4\int_{-2}^{2}x^3dx-3\int_{-2}^{2}x^2dx+2\int_{-2}^{2}xdx-\int_{-2}^{2}dx$$

$$=-6\int_{0}^{2}x^2dx-2\int_{0}^{2}dx$$

$$=-6\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2-2\left[x\right]_0^2=-16-4=\mathbf{-20}$$

(3) $\int_{1}^{3}(x^3+2x-1)dx+\int_{3}^{1}x^2(x-1)dx$

$$=\int_{1}^{3}(x^3+2x-1)dx-\int_{1}^{3}(x^3-x^2)dx$$

$$=\int_{1}^{3}(x^2+2x-1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-x\right]_1^3=(9+9-3)-\left(\frac{1}{3}+1-1\right)=\mathbf{\frac{44}{3}}$$

2. Procure o valor da integral $\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-4x+2)dx$. Assuma que α e β são 2 raízes reais distintas do integrando, e $\alpha<\beta$.

[Res.] $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$

De $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16-8=8$,

$\beta-\alpha=2\sqrt{2}$

Portanto,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-4x+2)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}\times(2\sqrt{2})^3=-\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

3. Procure o valor da integral $I=\int_{-2}^{1}|x^2-x-2|dx$.

[Res.] De $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$,

$$|x^2-x-2|=\begin{cases}x^2-x-2 & (-2\le x\le -1)\\ -x^2+x+2 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$$

Portanto,

$$I=\int_{-2}^{-1}(x^2-x-2)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{-1}+2\left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{0}^{1}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(-\frac{8}{3}-2+4\right)+2\left(-\frac{1}{3}+2\right)$$

$$=\frac{31}{6}$$

L 131a KUMON Integrais Definidas II

(16 pontos)

1. Cada uma das seguintes integrais definidas representa uma função de x. Diferencie cada uma em relação à x.

Ex.

$\int_0^x (t^3-t)\,dt$

[Res.] $\int_0^x (t^3-t)\,dt = \left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right) = x^3-x$

Nota: $\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)$ é usado para expressar: diferenciando a função $f(x)$ em relação à x.

(1) $\int_1^x (t^3-t)dt = \left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_1^x = \left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{x^3-x}$

(2) $\int_a^x (3t^2-4t+1)dt = \left[t^3-2t^2+t\right]_a^x = (x^3-2x^2+x)-(a^3-2a^2+a)$

$= x^3-2x^2+x-a^3+2a^2-a$

$\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+x-a^3+2a^2-a) = \boldsymbol{3x^2-4x+1}$

(3) $\int_a^x (t^2-x^2)dt = \left[\frac{1}{3}t^3-x^2t\right]_a^x = \left(\frac{1}{3}x^3-x^3\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-x^2a\right)$

$= -\frac{2}{3}x^3+ax^2-\frac{1}{3}a^3$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{3}x^3+ax^2-\frac{1}{3}a^3\right) = \boldsymbol{-2x^2+2ax}$

L I 3 I b

Se a é uma constante, $f(x)$ pode ser encontrada diferenciando $\int_a^x f(t)dt$ como uma função de x, em relação a x.

Se $F(t)$ é a integral indefinida de $f(t)$,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Diferenciando ambos os lados em relação a x,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = F'(x) = f(x)$$

Como $F(a)$ é constante, $\frac{d}{dx}[F(a)]$ é zero.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad (a \text{ é uma constante})$$

2. Diferencie as seguintes funções.

(1) $f(x) = \int_x^1 (2t-1)dt = -\int_1^x (2t-1)dt$

$$\frac{d}{dx}f(x) = -(2x-1) = \mathbf{-2x+1}$$

(2) $f(x) = \int_x^a (t^2+2t+3)dt = -\int_a^x (t^2+2t+3)dt$

$$\frac{d}{dx}f(x) = -(x^2+2x+3) = \mathbf{-x^2-2x-3}$$

(3) $f(x) = \int_x^a (3t^2-4t+1)dt = -\int_a^x (3t^2-4t+1)dt$

$$\frac{d}{dx}f(x) = -(3x^2-4x+1) = \mathbf{-3x^2+4x-1}$$

L I 32a KUMON Integrais Definidas II

(50 pontos)

Encontre o valor máximo relativo e o valor mínimo relativo de cada função.

Ex.

$F(x) = \int_{-1}^{x} 3t(t-2)dt$

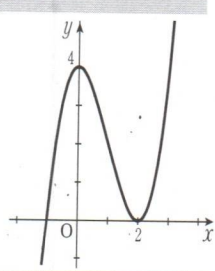
[Res.] $F(x) = \int_{-1}^{x} (3t^2 - 6t)dt$

$= \left[t^3 - 3t^2\right]_{-1}^{x} = x^3 - 3x^2 + 4$

Assim, $F'(x) = 3x(x-2)$

Podemos também encontrar esse resultado de $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	+	0	−	0	+
$F(x)$	↗	4	↘	0	↗



O valor máximo relativo é 4, em $x = 0$.

O valor mínimo relativo é 0, em $x = 2$.

(1) $F(x) = \int_0^x 3(t+3)(t-1)dt$

[Res.] $F(x) = \int_0^x (3t^2 + 6t - 9)dt$

$= \left[t^3 + 3t^2 - 9t\right]_0^x = x^3 + 3x^2 - 9x$

Assim, $F'(x) = 3(x+3)(x-1)$

Como outra alternativa, aplique apenas a fórmula do L I 3 I b.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$	+	0	−	0	+
$F(x)$	↗	27	↘	-5	↗

Portanto: **O valor máximo relativo é 27, em $x = -3$.**

O valor mínimo relativo é -5, em $x = 1$.

(2) $F(x)=\int_0^x t(t-1)(t-2)dt$

[Res.] $F(x)=\int_0^x (t^3-3t^2+2t)dt$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+t^2\right]_0^x=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2$$

Assim, $F'(x)=x(x-1)(x-2)$ ☜ Como outra alternativa, aplique apenas a fórmula do L I 31 b.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗

Portanto:

O valor máximo relativo é $\frac{1}{4}$, em $x=1$.

O valor mínimo relativo é 0, em $x=0,\ 2$.

L I 33a KUMON Integrais Definidas II

(50 pontos)

1. Encontre o valor máximo e o valor mínimo de
$F(x) = \int_0^x (t-1)(t-3)dt$, quando $0 \le x \le 4$.

[Res.] $F(x) = \int_0^x (t^2-4t+3)dt$

$= \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t\right]_0^x$

$= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$

Assim, $F'(x) = (x-1)(x-3)$ Como outra alternativa, aplique apenas a fórmula do L I 31 b.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$F'(x)$	+	+	0	−	0	+	+
$F(x)$	0	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↗	$\frac{4}{3}$

Portanto:

O valor máximo é $\frac{4}{3}$, em $x = 1$, 4.

O valor mínimo é 0, em $x = 0$, 3.

2. Encontre o valor máximo e o valor mínimo de

$F(x) = -\int_0^x (2t+3)(2t-1)dt$, quando $0 \le x \le 3$.

[Res.] $F(x) = -\int_0^x (4t^2+4t-3)dt$

$= -\left[\frac{4}{3}t^3+2t^2-3t\right]_0^x$

$= -\frac{4}{3}x^3-2x^2+3x$

Assim, $F'(x) = -(2x+3)(2x-1)$ ☜ Como outra alternativa, aplique apenas a fórmula do L I 31 b.

x	0	⋯	$\frac{1}{2}$	⋯	3
$F'(x)$	+	+	0	−	−
$F(x)$	0	↗	$\frac{5}{6}$	↘	−45

Portanto:

O valor máximo é $\frac{5}{6}$, em $x = \frac{1}{2}$.

O valor mínimo é -45, em $x = 3$.

L I 34a KUMON Integrais Definidas II

(50 pontos)

1. Encontre o valor máximo e valor mínimo de

$F(x) = \int_0^x t(t-1)(t-2)dt$, quando $0 \le x \le 3$.

Depois, desenhe o gráfico de $y = F(x)$.

[Res.] $F(x) = \int_0^x (t^3 - 3t^2 + 2t)dt$

$= \left[\frac{1}{4}t^4 - t^3 + t^2\right]_0^x$

$= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$

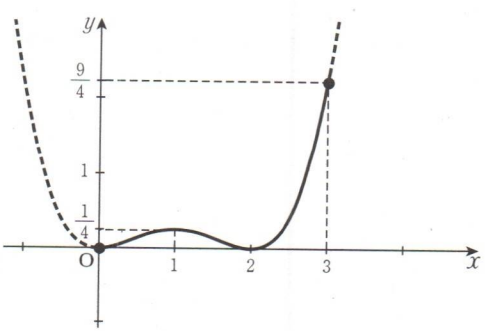
Assim, $F'(x) = x(x-1)(x-2)$ ☜ Como outra alternativa, aplique apenas a fórmula do L I 31 b.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$F'(x)$	0	+	0	−	0	+	+
$F(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$\frac{9}{4}$

Portanto:

O valor máximo é $\frac{9}{4}$, em $x = 3$.

O valor mínimo é 0, em $x = 0$, 2.



2. Seja $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + x$. Encontre o valor de x para que $F(x) = \int_x^2 f(t)dt$ seja máximo, e o valor máximo de $F(x)$.

[Res.] $F(x) = \int_x^2 (4t^3 + 3t^2 + t)dt$

$$= \left[t^4 + t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_x^2$$

$$= (16 + 8 + 2) - \left(x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right)$$

$$= -x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 26$$

Assim, $F'(x) = -4x^3 - 3x^2 - x$

$$= -x(4x^2 + 3x + 1)$$

Como $4x^2 + 3x + 1 = 4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0$,

$F'(x)$ muda de sinal $(+, -)$ antes e depois de $x = 0$.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$F'(x)$	+	0	−
$F(x)$	↗	26	↘

Portanto, **$F(x)$ tem valor máximo de 26, em $x = 0$.**

L I 35a KUMON Integrais Definidas II

(50 pontos)

Encontre a função $f(x)$ e o(s) valor(es) da constante a que satisfaz(em) as seguintes equações.

Ex.

$$\int_a^x f(t)dt = 3x^2 - 2x - a \quad \cdots ①$$

[Res.] Diferenciando ambos os lados em relação a x,

$$f(x) = 6x - 2$$

L.E. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

Assim,

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x (6t-2)dt$$

Trocando x por t em $f(x)$ obtém-se $f(t) = 6t - 2$.

$$= \left[3t^2 - 2t\right]_a^x$$

$$= 3x^2 - 2x - (3a^2 - 2a) \quad \cdots ②$$

Como ① e ② são iguais,

$$3x^2 - 2x - \boxed{\boldsymbol{a}} = 3x^2 - 2x - (\ \mathbf{3a^2 - 2a}\ )$$

Portanto,

$$a = 3a^2 - 2a$$

$$3a(a-1) = 0$$

Assim,

$$a = \boxed{\mathbf{0}},\ \boxed{\mathbf{1}}$$

Respostas: a, $3a^2 - 2a$ (na ordem) 0, 1 (em qualquer ordem)

L I 35b

(1) $\int_a^x f(t)dt = x^2 - 2x - 3 \quad \cdots ①$

[Res.] Difereciando ambos os lados em relação a x,

$\boldsymbol{f(x) = 2x - 2}$

Assim,

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x (2t-2)dt$$

$$= \left[t^2 - 2t\right]_a^x$$

$$= x^2 - 2x - (a^2 - 2a) \quad \cdots ②$$

Como ① e ② são iguais,

$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - (a^2 - 2a)$

Portanto,

$3 = a^2 - 2a$

$(a-3)(a+1) = 0$

Assim,

$\boldsymbol{a = 3,\ -1}$

Vamos tentar!

Referente ao exemplo da folha a, outro caminho para encontrar a está como segue:

Substituindo $x = a$ em ambos os lados de $\int_a^x f(t)dt = 3x^2 - 2x - a$,

$\int_a^a f(t)dt = 3a^2 - 2a - a$

$\boxed{0} = 3a^2 - 3a = 3a(a-1)$

Portanto, $a = 0,\ 1$

Resposta: 0

L 136a KUMON Integrais Definidas II

(50 pontos)

Encontre a função $f(x)$ que satisfaça a seguinte condição.

Ex.

$f(x) = x - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$

[Res.] Seja $a = \int_0^1 f(x)dx$ ···① ☜ $\int_0^1 f(x)dx$ é uma constante.

$f(x) = x - \frac{a}{2}$ ···②

Substitutindo ② em ①,

$a = \int_0^1 \left(x - \boxed{\frac{a}{2}}\right)dx$

$a = \left[\frac{1}{2}x^2 - \boxed{\frac{a}{2}}x\right]_0^1$

$a = \frac{1}{2} - \boxed{\frac{a}{2}}$

Portanto,

$\frac{3}{2}a = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{3}$

Assim, $f(x) = \boxed{x - \frac{1}{6}}$

Respostas: na ordem $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $x - \frac{1}{6}$

L I 36 b

(1) $f(x) = x^2 + \int_0^1 xf(t)dt$

Dica

[Res.] $f(x) = x^2 + x\int_0^1 f(t)dt$

Seja $a = \int_0^1 f(t)dt \quad \cdots ①$

$f(x) = x^2 + ax$

Trocando x por t em $f(x)$ obtém-se

$f(t) = t^2 + at \quad \cdots ②$

Substituindo ② em ①,

$a = \int_0^1 (t^2 + at)dt$

$a = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2\right]_0^1$

$a = \frac{1}{3} + \frac{a}{2}$

Portanto,

$\frac{1}{2}a = \frac{1}{3}$

$a = \frac{2}{3}$

Assim, $\boldsymbol{f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x}$

Dica

Aqui, x é uma constante em relação a variável de integração (t), então

$\int_0^1 xf(t)dt = x\int_0^1 f(t)dt$

L 137a KUMON Integrais Definidas II

(50 pontos)

1. Encontre a função quadrática $f(x)$ que satisfaça as condições: $f(-1)=2$, $f'(0)=0$ e $\int_0^1 f(x)dx=-2$.

[Res.] Seja $f(x)=ax^2+bx+c$ (onde $a\neq 0$)

$f'(x)=\boldsymbol{2ax+b}$

Das condições dadas,

$f(-1)=a-b+c=\mathbf{2}$ …①

$f'(0)=b=\mathbf{0}$ …②

$$\int_0^1 (ax^2+bx+c)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=\mathbf{-2}$$

Assim, $2a+3b+6c=-12$ …③

De ①, ② e ③,

$a=6$, $b=0$, $c=-4$

Portanto, $\boldsymbol{f(x)=6x^2-4}$

2. Encontre a função quadrática $f(x)$ que satisfaça as condições:

$f'(0)=-6$, $f(1)=1$ e $\int_0^2 xf(x)dx=6$.

[Res.] Seja $f(x)=ax^2+bx+c$ (onde $a\neq 0$)

$f'(x)=2ax+b$

Das condições dadas,

$f'(0)=b=-6 \quad \cdots①$

$f(1)=a+b+c=1 \quad \cdots②$

$$\int_0^2 (ax^3+bx^2+cx)dx=\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=4a+\frac{8}{3}b+2c=6$$

Assim, $12a+8b+6c=18 \quad \cdots③$

De ①, ② e ③,

$a=4$, $b=-6$, $c=3$

Portanto, $\boldsymbol{f(x)=4x^2-6x+3}$

L 138a KUMON Integrais Definidas II

(50 pontos)

Ex.

Seja $f(x)=x^2+ax+b$. Dada qualquer função linear $g(x)$, encontre os valores de a e b para que $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=0$, seja sempre verdadeira.

[Res.] Seja $g(x)=px+q$ (onde p e q são constantes, e $p\neq 0$)

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)(px+q)dx$$

$$=p\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx+q\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx$$

$$=2p\int_{0}^{1}ax^2dx+2q\int_{0}^{1}(\ \boldsymbol{x^2+b}\ )dx$$

$$=2p\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1+2q\left[\ \frac{1}{3}\boldsymbol{x^3+bx}\ \right]_0^1$$

$$=\frac{2a}{3}p+\frac{2}{3}(\ \mathbf{1+3b}\ )q=0 \quad \cdots ①$$

Para que ① seja verdadeira, independente dos valores de p e q,

$$\frac{2a}{3}=0,\ \frac{2}{3}(\ \mathbf{1+3b}\ )=0$$

Portanto,

$$a=0,\ b=\boxed{-\frac{1}{3}}$$

Respostas: na ordem x^2+b, $\frac{1}{3}x^3+bx$, $1+3b$, $1+3b$, $-\frac{1}{3}$

L I 38 b

1. Seja $f(x)=ax^2+bx+1$. Dada qualquer função linear $g(x)$, encontre os valores de a e b para que $\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$, seja sempre verdadeira.

[Res.] Seja $g(x)=px+q$ (onde p e q são constantes, e $p\neq 0$)

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$=\int_0^1 (ax^2+bx+1)(px+q)dx$$

$$=p\int_0^1 (ax^3+bx^2+x)dx+q\int_0^1 (ax^2+bx+1)dx$$

$$=p\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+q\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+x\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{1}{2}\right)p+\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1\right)q=0 \quad \cdots①$$

Para que ① seja sempre verdadeira, independente dos valores de p e q,

$$\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{1}{2}=0 \quad \cdots②$$

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1=0 \quad \cdots③$$

De ② e ③,

$$\boldsymbol{a=6,\ b=-6}$$

L 139a KUMON Integrais Definidas II

(50 pontos)

Ex.

Dado que $f(x)$ é uma função linear, e $\int_0^1 f(x)dx = 1$, prove que $\int_0^1 [f(x)]^2 dx > 1$.

[Res.] Seja $f(x) = ax + b$ (onde $a \neq 0$)

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax+b)dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + bx\right]_0^1$$

$$= \frac{a}{2} + b = \boxed{1} \quad \cdots ①$$

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx = \int_0^1 (ax+b)^2 dx = \int_0^1 (a^2x^2 + 2abx + b^2)dx$$

$$= \left[\frac{a^2}{3}x^3 + abx^2 + b^2x\right]_0^1 = \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \quad \cdots ②$$

De ①, $b = \boxed{\mathbf{1 - \frac{a}{2}}}$ $\cdots ③$

Substituindo ③ em ②,

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx = \frac{a^2}{3} + a\left(\boxed{\mathbf{1 - \frac{a}{2}}}\right) + \left(\boxed{\mathbf{1 - \frac{a}{2}}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}a^2 + \boxed{1} > 1$$

Portanto, $\int_0^1 [f(x)]^2 dx > 1$

Respostas: na ordem 1, $1 - \frac{a}{2}$, $1 - \frac{a}{2}$, 1

L 139b

1. Dado que $f(x)$ é uma função linear, prove que $\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 < \int_0^1 [f(x)]^2 dx$.

[Res.] Seja $f(x) = ax + b$ (onde $a \neq 0$)

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax+b)dx$$

$$= \left[\frac{a}{2}x^2 + bx\right]_0^1$$

$$= \frac{a}{2} + b$$

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = \frac{a^2}{4} + ab + b^2$$

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx = \int_0^1 (a^2x^2 + 2abx + b^2)dx$$

$$= \left[\frac{a^2}{3}x^3 + abx^2 + b^2x\right]_0^1$$

$$= \frac{a^2}{3} + ab + b^2$$

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx - \left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 = \frac{a^2}{3} + ab + b^2 - \left(\frac{a^2}{4} + ab + b^2\right)$$

$$= \frac{1}{12}a^2 > 0$$

Portanto, $\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 < \int_0^1 [f(x)]^2 dx$

L I40a KUMON Integrais Definidas II

(50 pontos)

1. Encontre os valores extremos relativos de $f(x) = \int_0^x 2(t+1)(t-3)dt$.

[Res.] $f(x) = \left[\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 - 6t\right]_0^x$

$= \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x$

Assim, $f'(x) = 2(x+1)(x-3)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{10}{3}$	↘	-18	↗

O valor máximo relativo é $\frac{10}{3}$, em $x = -1$.

O valor mínimo relativo é -18, em $x = 3$.

2. Encontre a função $f(x)$ e o(s) valor(es) da constante a que satisfaz (em) a seguinte equação.

$$\int_a^x f(t)dt = 2x^2 - 3x + 1 \qquad \cdots ①$$

[Res.] Diferenciando ambos os lados em relação a x,

$$\boldsymbol{f(x) = 4x - 3}$$

Assim,

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x (4t-3)dt$$

$$= \left[2t^2 - 3t\right]_a^x$$

$$= 2x^2 - 3x - (2a^2 - 3a) \qquad \cdots ②$$

Como ① e ② são iguais,

$$2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 - 3x - (2a^2 - 3a)$$

Portanto,

$$1 = -2a^2 + 3a$$

$$2a^2 - 3a + 1 = 0$$

$$(2a-1)(a-1) = 0$$

Assim,

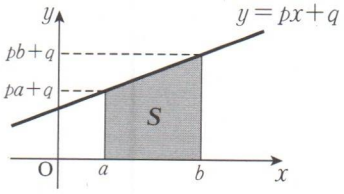
$$\boldsymbol{a = \frac{1}{2},\ 1}$$

Solução Alternativa
Substituindo $x = a$ em ①,
$\int_a^a f(t)dt = 2a^2 - 3a + 1$
$0 = 2a^2 - 3a + 1$
$(2a-1)(a-1) = 0$
$a = \frac{1}{2},\ 1$

L141a KUMON Áreas I

(33 pontos)

Considere a área limitada pela função do 1º grau $f(x) = px+q$ $(p \neq 0)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$.



(i) Calculando a área diretamente,

S = (distância entre os lados paralelos) × (média dos lados paralelos)

$$= (b-a)\cdot\frac{1}{2}[(pa+q)+(pb+q)]$$

$$= (b-a)\cdot\left[\frac{p(a+b)}{2}+q\right]$$

$$= \frac{p}{2}(b^2-a^2)+q(b-a)$$

Use a fórmula para a área do trapézio.

(ii) Considerando a seguinte integral,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (px+q)dx$$

$$= \left[\frac{p}{2}x^2+qx\right]_a^b = \frac{p}{2}(b^2-a^2)+q(b-a)$$

Comparando os resultados de (i) e (ii),

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

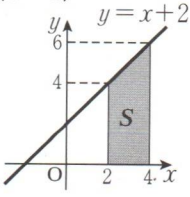
(área de região limitada.)	=	(a integral definida na região especificada.)

1. Encontre a área, S, limitada pela reta $f(x) = x+2$ e o eixo x no intervalo $[2, 4]$, usando dois métodos diferentes:

(1) Usando a fórmula para área do trapézio,

[Res.] $S = 2\times\frac{1}{2}(4+6)$

$= 10$



(2) Usando integração,

[Res.]

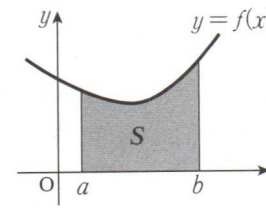
$$\int_2^4 (x+2)dx = \left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_2^4$$

$$= \left(\frac{16}{2}+8\right)-\left(\frac{4}{2}+4\right)$$

$$= 16-6 = 10$$

Geralmente quando $f(x) \geq 0$ podemos encontrar a área, S, limitada pela curva $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $[a, b]$, usando a seguinte fórmula:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



2. Encontre a área, S, limitada pela curva dada e o eixo x como segue:

Ex.

$y = -x^2 - 3x$

[Res.] De $y = -x^2 - 3x = -x(x+3) = 0$, ☜ Encontre a intersecção com o eixo x.

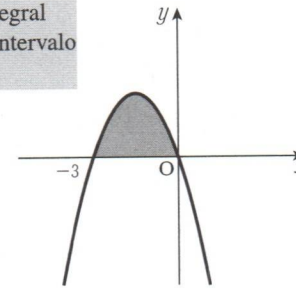
$x = -3,\ 0$

Portanto,

$S = \int_{-3}^{0} (-x^2 - 3x)dx$ ☜ Calcule a integral definida no intervalo $[-3, 0]$.

$= -\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0}$

$= -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$



(1) $y = -x^2 + 2x + 3$

[Res.] De $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-3)(x+1) = 0$,

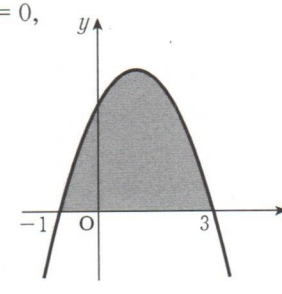
$x = -1,\ 3$

Portanto,

$S = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}$

$= (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \mathbf{\frac{32}{3}}$



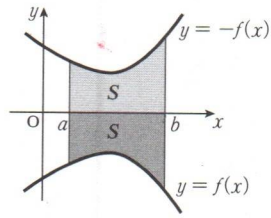
L 142a KUMON Áreas I

(33 pontos)

No intervalo $[a, b]$ há duas regiões, uma limitada por $y = f(x)$ e o eixo x e outra limitada por $y = -f(x)$ e o eixo x, que são simétricas em relação ao eixo x e iguais na área.

Assim, quando $f(x) \leq 0$ podemos encontrar a área, S, utilizando a seguinte fórmula:

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



1. Encontre a área, S, limitada pela curva dada e o eixo x como segue:

Ex.

$y = x^2 - 4x$

[Res.] De $y = x^2 - 4x = x(x-4) = 0$,

$x = 0,\ 4$

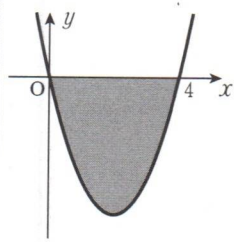
Portanto,

$$S = -\int_0^4 (x^2 - 4x)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]_0^4$$

$$= -\left(\frac{64}{3} - 32\right) = \frac{32}{3}$$

Desde que a região esteja abaixo do eixo x no intervalo $[0, 4]$, coloque um sinal de menos, "$-$", na frente da integral.



(1) $y = x^2 + x - 2$

[Res.] De $y = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0$,

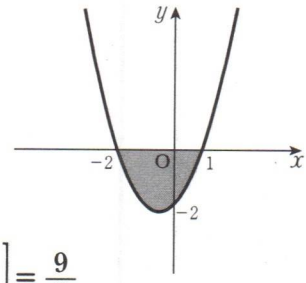
$x = -2,\ 1$

Portanto,

$$S = -\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-2}^{1}$$

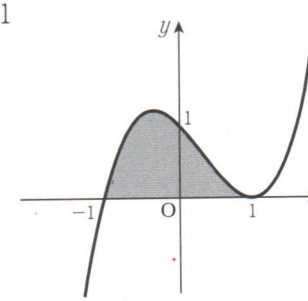
$$= -\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right)\right] = \frac{9}{2}$$



2. Encontre a área, S, limitada pela curva dada e o eixo x.

(1) $y=(x+1)(x-1)^2$

[Res.] De $y=(x+1)(x-1)^2=0$, $x=-1$, 1

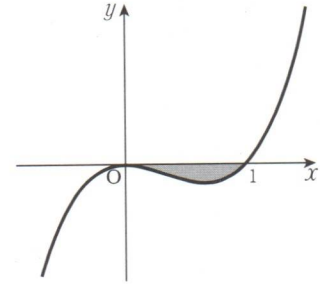


Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)^2dx\\&=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx\\&=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx\\&=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1\\&=2\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\mathbf{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

(2) $y=x^2(x-1)$

[Res.] De $y=x^2(x-1)=0$, $x=0$, 1



Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=-\int_{0}^{1}x^2(x-1)dx\\&=-\int_{0}^{1}(x^3-x^2)dx\\&=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\\&=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=\mathbf{\frac{1}{12}}\end{aligned}$$

Nota: Dado que a curva $y=f(x)$ intercepta o eixo x em 2 pontos, onde as coordenadas x são α e β (onde $\alpha<\beta$), a área, S, limitada pela curva e o eixo x pode ser expressa como segue:

(i) Quando a região limitada está acima do eixo x: $S=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$

(ii) Quando a região limitada está abaixo do eixo x: $S=-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$

L 143a KUMON Áreas I

(33 pontos)

1. Encontre a área, S, limitada pela curva dada e o eixo x como segue:

Ex.

$y = x^3 - 3x^2 + 2x$

[Res.]

De $y = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-2)(x-1) = 0$,

$x = 0,\ 1,\ 2$

Portanto,

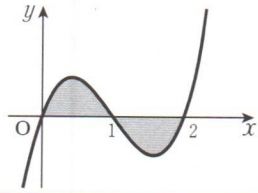
$$S = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - \left[(4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

Como $y \leq 0$ no intervalo $[1,\ 2]$, coloque um sinal negativo, "$-$", na frente desta integral.



(1) $y = -x^3 - x^2 + 2x$

[Res.] De $y = -x^3 - x^2 + 2x = -x(x+2)(x-1) = 0$,

$x = -2,\ 0,\ 1$

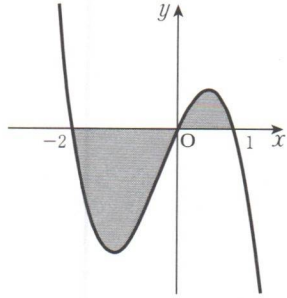
Portanto,

$$S = -\int_{-2}^0 (-x^3 - x^2 + 2x)dx + \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x)dx$$

$$= -\left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^1$$

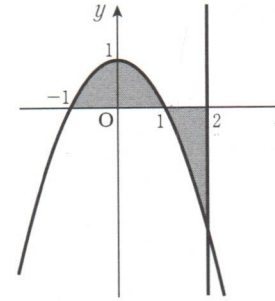
$$= \left(-4 + \frac{8}{3} + 4\right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= \mathbf{\frac{37}{12}}$$



2. Encontre a área, S, da região sombreada (▭) limitada pela curva dada, a reta dada e o eixo x.

(1) $y=-x^2+1$, reta $x=2$



[Res.] De $y=-x^2+1=-(x+1)(x-1)=0$,

$x=-1,\ 1$

Portanto,

$$S=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx-\int_{1}^{2}(-x^2+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx-\int_{1}^{2}(-x^2+1)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1-\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^2$$

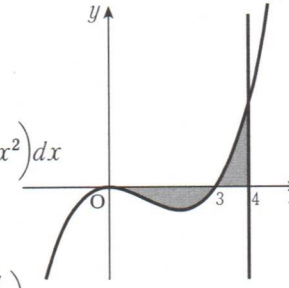
$$=2\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left[\left(-\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right]$$

$$=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

(2) $y=\frac{1}{2}x^2(x-3)$, reta $x=4$

[Res.] De $y=\frac{1}{2}x^2(x-3)=0$, $x=0,\ 3$

Portanto,



$$S=-\int_{0}^{3}\frac{1}{2}x^2(x-3)dx+\int_{3}^{4}\frac{1}{2}x^2(x-3)dx$$

$$=-\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)dx+\int_{3}^{4}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3\right]_0^3+\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3\right]_3^4$$

$$=-\left(\frac{81}{8}-\frac{27}{2}\right)+\left(\frac{256}{8}-\frac{64}{2}\right)-\left(\frac{81}{8}-\frac{27}{2}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{27}{4}}$$

L 144a KUMON Áreas I

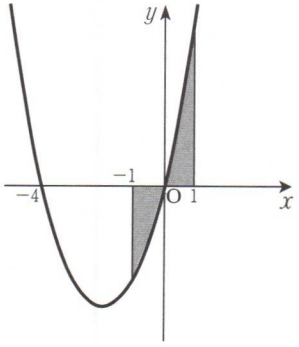
(33 pontos)

1. Encontre a área, S, limitada pela curva $y = x^2 + 4x$ e o eixo x no intervalo $-1 \le x \le 1$.

[Res.] De $y = x^2 + 4x = x(x+4) = 0$, $x = -4,\ 0$

Portanto,

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-1}^{0} (x^2+4x)dx + \int_{0}^{1} (x^2+4x)dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_{0}^{1} \\ &= -\left[-\left(-\frac{1}{3}+2\right)\right] + \left(\frac{1}{3}+2\right) \\ &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

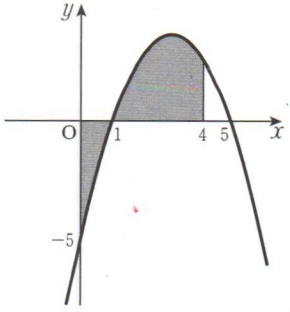


2. Encontre a área, S, limitada pela curva $y = -x^2 + 6x - 5$ e o eixo x no intervalo $0 \le x \le 4$.

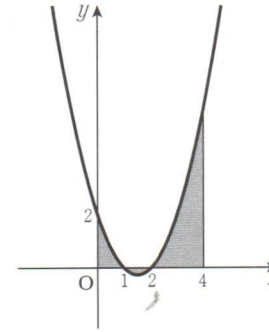
[Res] De $y = -x^2 + 6x - 5 = -(x-5)(x-1) = 0$, $x = 1,\ 5$

Portanto,

$$\begin{aligned} S &= -\int_{0}^{1} (-x^2+6x-5)dx + \int_{1}^{4} (-x^2+6x-5)dx \\ &= -\left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x\right]_{0}^{1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x\right]_{1}^{4} \\ &= -\left(-\frac{1}{3}+3-5\right) + \left(-\frac{64}{3}+48-20\right) \\ &\quad -\left(-\frac{1}{3}+3-5\right) \\ &= \mathbf{\frac{34}{3}} \end{aligned}$$



3. Encontre a área, S, limitada pela curva $y=x^2-3x+2$ e o eixo x no intervalo $0 \le x \le 4$.



[Res.] De $y=x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=0$,

$x=1,\ 2$

Portanto,

$$S=\int_0^1(x^2-3x+2)dx-\int_1^2(x^2-3x+2)dx+\int_2^4(x^2-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_2^4$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)-\left[\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right]$$

$$+\left(\frac{64}{3}-24+8\right)-\left(\frac{8}{3}-6+4\right)$$

$$=\mathbf{\frac{17}{3}}$$

L 145a KUMON Áreas I

(20 pontos)

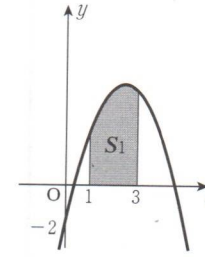
1. Complete as seguintes questões.

(1) Encontre a área, S_1, limitada por $y = -x^2+5x-2$, o eixo x, $x=1$ e $x=3$.

[Res.] $S_1 = \int_1^3 (-x^2+5x-2)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x\right]_1^3$

$= \left(-9+\frac{45}{2}-6\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-2\right) = \mathbf{\frac{22}{3}}$

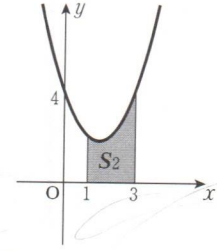


(2) Encontre a área, S_2, limitada por $y = x^2-3x+4$, o eixo x, $x=1$ e $x=3$.

[Res.] $S_2 = \int_1^3 (x^2-3x+4)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x\right]_1^3$

$= \left(9-\frac{27}{2}+12\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4\right) = \mathbf{\frac{14}{3}}$



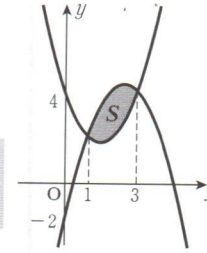
(3) Encontre a área, S, limitada por $y = -x^2+5x-2$ e $y = x^2-3x+4$.

[Res.] A área, S, é igual a área $S_1 - S_2$.

Portanto,

$S = S_1 - S_2 = \frac{22}{3} - \frac{14}{3} = \mathbf{\frac{8}{3}}$

Use as respostas de (1) e (2).



2. Preencha os quadros em branco.

[**Nota:** Estas curvas se interceptam quando $x=1$ e $x=3$.]

De um modo geral, quando $f(x) \geq g(x)$, a área, S, limitada pelas duas curvas $y=f(x)$ e $y=g(x)$ no intervalo $[a, b]$, pode ser encontrada usando a seguinte fórmula:

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \boxed{\boldsymbol{g(x)}}\,dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

3. Encontre a área, S, limitada pela curva e reta dadas.

Ex.

$y=x^2$, $\quad y=x+2$

[Res.] Encontre as coordenadas x dos pontos de intersecção,

de $x^2=x+2$,

$(x-2)(x+1)=0$

$x=-1,\ 2$ ☜ As coordenadas x dos pontos de intersecção determinam o intervalo.

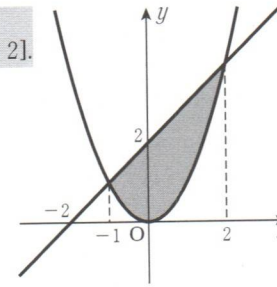
Portanto,

$$S=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx$$ ☜ $x+2\geq x^2$ no intervalo $[-1,\ 2]$.

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(2+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{9}{2}$$



(1) $y=-x^2+2x+3$, $\quad y=x+1$

[Res.] De $-x^2+2x+3=x+1$,

$(x-2)(x+1)=0$

$x=-1,\ 2$

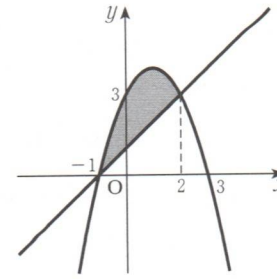
Portanto,

$$S=\int_{-1}^{2}[-x^2+2x+3-(x+1)]dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

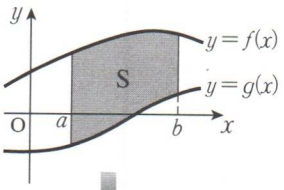


L 146a KUMON Áreas I

(33 pontos)

Assim como é mostrado na Figura (i), no intervalo $[a,\ b]$, $f(x) \geq g(x)$, mas $g(x)$ tem valores negativos. Como é mostrado na Figura (ii), se deslocarmos $f(x)$ e $g(x)$, C unidades na direção positiva do eixo y, a área, S, da região é a mesma:

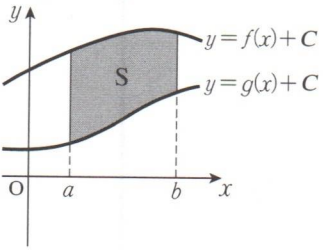
[Figura (i)]



$$S = \int_a^b [(f(x)+C)-(g(x)+C)]dx$$

$$= \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

[Figura (ii)]



Portanto, a área, limitada por $y = f(x)$ e $y = g(x)$ é:

$$S = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx \quad (\text{onde } f(x) \geqq g(x))$$

1. Encontre a área, S, limitada pela curva e reta dadas.

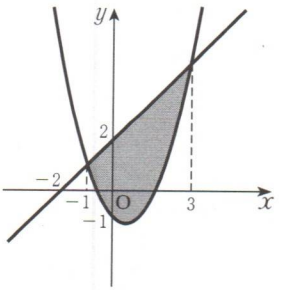
(1) $y = x^2 - x - 1$, $y = x + 2$

[Res.] De $x^2 - x - 1 = x + 2$,

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = -1,\ 3$

Portanto,



$$S = \int_{-1}^{3} [x+2-(x^2-x-1)]dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (-x^2+2x+3)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}$$

$$= (-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right) = \mathbf{\frac{32}{3}}$$

L 1 46 b

(2) $y=x^2-2x$, $y=-x^2+4$

[Res.] De $x^2-2x=-x^2+4$,

$2(x-2)(x+1)=0$

$x=-1,\ 2$

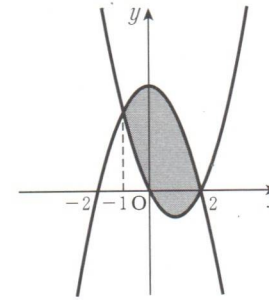
Portanto,

$$S=\int_{-1}^{2}[-x^2+4-(x^2-2x)]dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}+1-4\right)=\mathbf{9}$$



(3) $y=x^3+4x^2+3x$, $y=-x$

[Res.] De $x^3+4x^2+3x=-x$,

$x^3+4x^2+4x=x(x+2)^2=0$

$x=-2,\ 0$

Portanto,

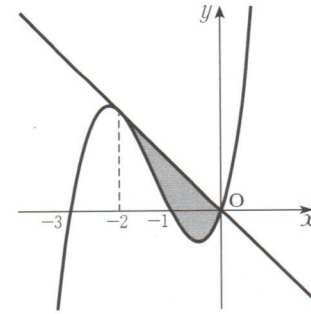
$$S=\int_{-2}^{0}[-x-(x^3+4x^2+3x)]dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(-x^3-4x^2-4x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$=-\left(-4+\frac{32}{3}-8\right)$$

$$=\mathbf{\frac{4}{3}}$$



L 147a KUMON Áreas I

(50 pontos)

Encontre a área, S, limitada pela curva e reta dadas.

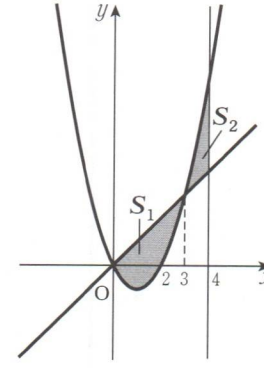
(1) $y = x^2 - 2x$, $y = x$, $x = 4$

[Res.] De $x^2 - 2x = x$,

$x(x-3) = 0$

$x = 0,\ 3$

Portanto:



(i) Quando $0 \le x \le 3$, ☜ $x \ge x^2 - 2x$

$$S_1 = \int_0^3 [x - (x^2 - 2x)]\,dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3$$

$$= -9 + \frac{27}{2} = \mathbf{\frac{9}{2}}$$

(ii) Quando $3 \le x \le 4$, ☜ $x^2 - 2x \ge x$

$$S_2 = \int_3^4 [(x^2 - 2x) - x]\,dx$$

$$= \int_3^4 (x^2 - 3x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^4$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 24 \right) - \left(9 - \frac{27}{2} \right) = \mathbf{\frac{11}{6}}$$

De (i) e (ii),

$$S = S_1 + S_2 = \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \mathbf{\frac{19}{3}}$$

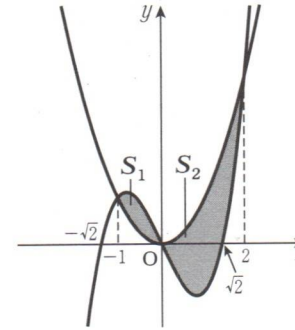
(2) $y = x^3 - 2x, \quad y = x^2$

[Res.] De $x^3 - 2x = x^2$,

$x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2) = 0$

$x = -1,\ 0,\ 2$

Portanto:



(i) Quando $-1 \le x \le 0$,

$$S_1 = \int_{-1}^{0} [(x^3 - 2x) - x^2]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) = \frac{5}{12}$$

(ii) Quando $0 \le x \le 2$,

$$S_2 = \int_{0}^{2} [x^2 - (x^3 - 2x)]\,dx$$

$$= \int_{0}^{2} (-x^3 + x^2 + 2x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= -4 + \frac{8}{3} + 4 = \frac{8}{3}$$

De (i) e (ii),

$$S = S_1 + S_2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \mathbf{\frac{37}{12}}$$

L 148a KUMON Áreas I

(33 pontos)

A seguinte fórmula pode ser usada para encontrar as áreas das regiões envolvendo parábolas.

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

Encontre a área, S, limitada pela parábola e/ou reta dadas.

Ex.

$y = x^2 - x - 1, \quad y = x + 2$

[Res.] De $x^2 - x - 1 = x + 2$,

$(x-3)(x+1) = 0$

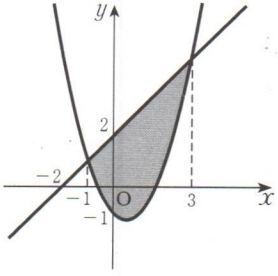
$x = -1,\ 3$

$$S = \int_{-1}^{3}[x+2-(x^2-x-1)]dx$$

$$= -\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx$$

$$= -\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$$

$$= \frac{1}{6}[3-(-1)]^3 = \frac{32}{3}$$



(1) $y = -x^2 - 2x + 3, \quad y = -x + 1$

[Res.] De $-x^2 - 2x + 3 = -x + 1$,

$(x+2)(x-1) = 0$

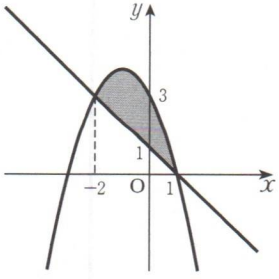
$x = -2,\ 1$

$$S = \int_{-2}^{1}[-x^2-2x+3-(-x+1)]dx$$

$$= -\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx$$

$$= -\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx$$

$$= \frac{1}{6}(1+2)^3 = \mathbf{\frac{9}{2}}$$

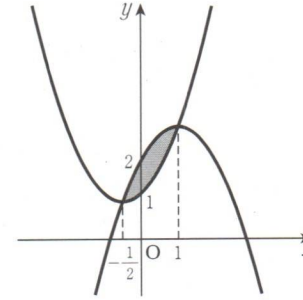


(2) $y=x^2+x+1, \quad y=-x^2+2x+2$

[Res.] De $x^2+x+1=-x^2+2x+2$,

$$(2x+1)(x-1)=0$$

$$x=-\frac{1}{2},\ 1$$



$$\boldsymbol{S}=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}[-x^2+2x+2-(x^2+x+1)]dx$$

$$=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)dx$$

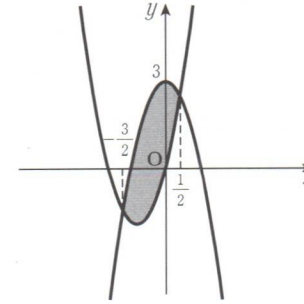
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{9}{8}}$$

(3) $y=2x^2+4x, \quad y=-2x^2+3$

[Res.] De $2x^2+4x=-2x^2+3$,

$$(2x+3)(2x-1)=0$$

$$x=-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}$$



$$\boldsymbol{S}=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}[-2x^2+3-(2x^2+4x)]dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}(-4x^2-4x+3)dx$$

$$=-4\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x^2+x-\frac{3}{4}\right)dx$$

$$=-4\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$$

L 149a KUMON Áreas I

(50 pontos)

Encontre a área, S, limitada pela parábola e/ou reta dadas.

Ex.

$y = -x^2 + 3x - 1, \quad y = x - 2$

[Res.] De $-x^2 + 3x - 1 = x - 2$,

$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \cdots ①$

Sejam α e β (onde $\alpha < \beta$) as soluções de ①, então

$\alpha + \beta =$ **2**, $\alpha\beta =$ **−1** Da relação entre raízes e coeficientes.

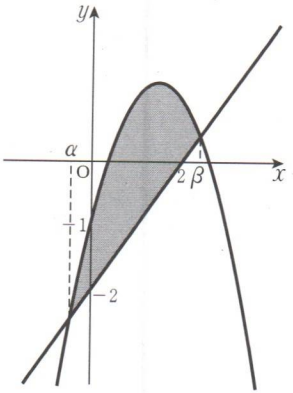
Portanto,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} [-x^2 + 3x - 1 - (x - 2)]\,dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - 2x - 1)\,dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$



De $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta =$ **8**,

$\beta - \alpha =$ $\boxed{2\sqrt{2}}$

Portanto, $(\beta - \alpha)^3 =$ $\boxed{16\sqrt{2}}$

Assim, $S =$ $\boxed{\dfrac{8\sqrt{2}}{3}}$

Respostas: na ordem 2, -1, 8, $2\sqrt{2}$, $16\sqrt{2}$, $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

L149b

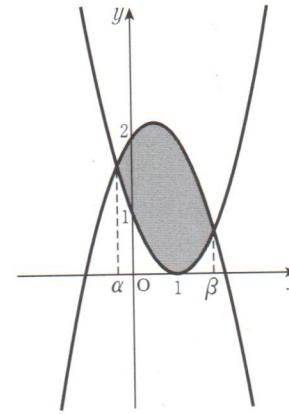
(1) $y=x^2-2x+1, \quad y=-x^2+x+2$

[Res.] De $x^2-2x+1=-x^2+x+2$,

$2x^2-3x-1=0 \quad \cdots①$

Sejam α e β (onde $\alpha<\beta$) as soluções de ①, então

$\alpha+\beta=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$



Portanto,

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}[-x^2+x+2-(x^2-2x+1)]dx$$

$$=-2\int_{\alpha}^{\beta}\left(x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=-2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

De $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{17}{4}$,

$\beta-\alpha=\frac{\sqrt{17}}{2}$

Portanto, $(\beta-\alpha)^3=\frac{17\sqrt{17}}{8}$

Assim, $\boldsymbol{S=\frac{17\sqrt{17}}{24}}$

L 150a KUMON Áreas I

(33 pontos)

Encontre a área, S, limitada pela parábola e/ou reta dadas.

(1) $y = x(x+1)(x-2)$, o eixo x

[Res.] De $y = x(x+1)(x-2) = 0$, $x = -1,\ 0,\ 2$

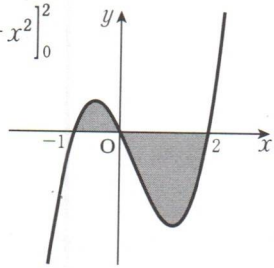
Portanto,

$$S = \int_{-1}^{0} x(x+1)(x-2)dx - \int_{0}^{2} x(x+1)(x-2)dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) - \left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) = \mathbf{\frac{37}{12}}$$



(2) $y = x^2 + 2x - 3$, $y = -x^2 + 2x + 3$

[Res.] De $x^2 + 2x - 3 = -x^2 + 2x + 3$,

$2x^2 = 6$

$x = \pm\sqrt{3}$

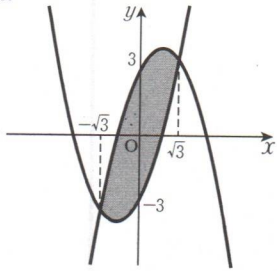
Portanto,

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} [-x^2 + 2x + 3 - (x^2 + 2x - 3)]dx$$

$$= 2\int_{0}^{\sqrt{3}} (-2x^2 + 6)dx$$

$$= 2\left[-\frac{2}{3}x^3 + 6x\right]_{0}^{\sqrt{3}}$$

$$= 2(-2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}) = \mathbf{8\sqrt{3}}$$



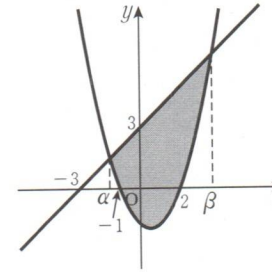
(3) $y=x^2-x-2$, $y=x+3$

[Res.] De $x^2-x-2=x+3$,

$x^2-2x-5=0$ $\cdots$①

Sejam α e β (onde $\alpha<\beta$) as soluções de ①, então

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-5$



Portanto,

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}[x+3-(x^2-x-2)]dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-2x-5)dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

De $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=24$,

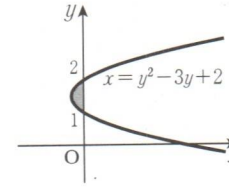
$\beta-\alpha=2\sqrt{6}$

Portanto, $(\beta-\alpha)^3=48\sqrt{6}$

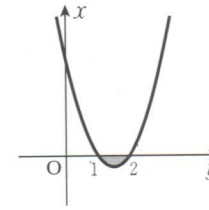
Assim, $\boldsymbol{S=8\sqrt{6}}$

Vamos tentar!

Encontre a área, S, da parte sombreada mostrada no gráfico à direita.



[Res.] Como é mostrado na figura abaixo, podemos transformar o gráfico rearranjando o eixo x para o eixo y, e o eixo y para o eixo x.



$$S=-\int_{1}^{2}(y^2-3y+2)dy$$

$$=-\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y\right]_1^2=\boxed{\frac{1}{6}}$$

Resposta: $\frac{1}{6}$

L 151a KUMON Áreas II

(50 pontos)

Ex.

Encontre a área, S, limitada pela parábola $y = x^2 - 3x$, a reta $y = 2x$ e a reta $y = -x$.

[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção de $y = x^2 - 3x$ e $y = -x$:

De $x^2 - 3x = -x$,

$x(x-2) = 0$

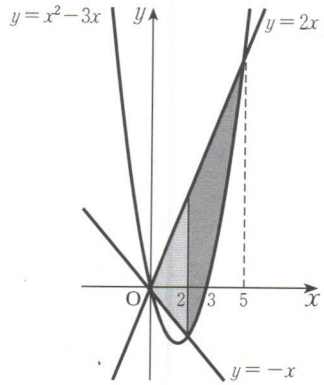
$x = 0,$ $\boxed{2}$

Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção de $y = x^2 - 3x$ e $y = 2x$:

De $x^2 - 3x = 2x$,

$x(x-5) = 0$

$x = 0,\ 5$



Portanto,

$$S = \underbrace{\int_0^{\boxed{2}} [2x-(-x)]dx}_{\text{Esta representa a área da região clara do gráfico acima } \square.} + \underbrace{\int_{\boxed{2}}^5 [2x-(x^2-3x)]dx}_{\text{Esta representa a área da região escura do gráfico acima } \blacksquare.}$$

$$= \int_0^{\boxed{2}} 3x\,dx + \int_{\boxed{2}}^5 (-x^2+5x)dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\boxed{2}} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_{\boxed{2}}^5$$

$$= 6 + \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - \left(-\frac{8}{3} + 10\right)$$

$$= \boxed{\frac{39}{2}}$$

Respostas: na ordem 2, 2, 2, 2, 2, 2, $\frac{39}{2}$

L I 5 I b

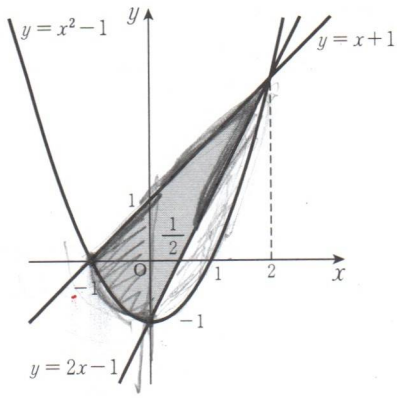
1. Encontre a área, S, limitada pela parábola $y = x^2 - 1$, a reta $y = 2x - 1$ e a reta $y = x + 1$.

[Res.] Encontrando as coordenadas de x dos pontos intersecção de $y = x^2 - 1$ e $y = 2x - 1$:

De $x^2 - 1 = 2x - 1$,

$x(x-2) = 0$

$x = 0,\ 2$



Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção de $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$:

De $x^2 - 1 = x + 1$,

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2,\ -1$

Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção de $y = 2x - 1$ e $y = x + 1$:

De $2x - 1 = x + 1$,

$x = 2$

Portanto,

$$S = \int_{-1}^{0} [x+1-(x^2-1)]dx + \int_{0}^{2} [x+1-(2x-1)]dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^2+x+2)dx + \int_{0}^{2} (-x+2)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{0}^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) + (-2+4)$$

$$= \mathbf{\frac{19}{6}}$$

L 152a KUMON Áreas II

(50 pontos)

1. Encontre o valor de a de tal forma que a área, S, limitada pela parábola $y = ax - x^2$ e o eixo x seja $\frac{9}{2}$.

[Res. Encontrando os pontos de intersecção com o eixo x:

De $ax - x^2 = -x(x-a) = 0$, $x = 0,\ a$

(i) Quando $a < 0$,

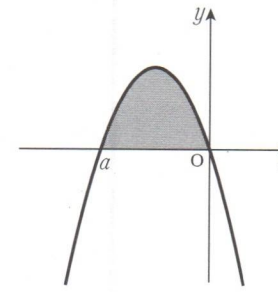
$$S = \int_a^0 (ax - x^2)dx$$

$$= \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_a^0$$

$$= -\frac{a^3}{6} = \frac{9}{2}$$

Portanto, $a^3 = -27$

Assim, $\boldsymbol{a = -3}$



(ii) Quando $a > 0$,

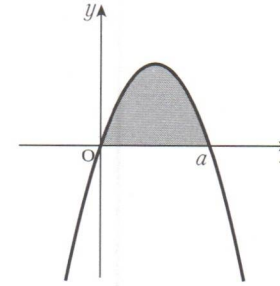
$$S = \int_0^a (ax - x^2)dx$$

$$= \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= \frac{a^3}{6} = \frac{9}{2}$$

Portanto, $a^3 = 27$

Assim, $\boldsymbol{a = 3}$



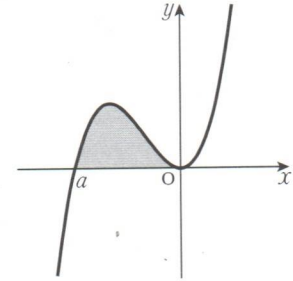
De (i) e (ii),

$\boldsymbol{a = \pm 3}$

2. Encontre o valor de a de forma que a área, S, limitada pela curva $y = x^3 - ax^2$ e o eixo x seja $\frac{4}{3}$.

[Res.] Encontrando os pontos de intersecção com o eixo x:

De $x^3 - ax^2 = x^2(x-a) = 0$, $x = 0,\ a$



(i) Quando $a < 0$,

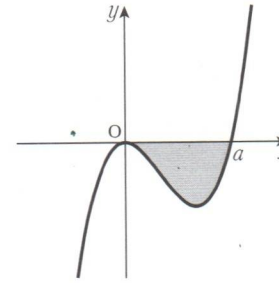
$$S = \int_a^0 (x^3 - ax^2)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3\right]_a^0$$

$$= \frac{a^4}{12} = \frac{4}{3}$$

Portanto, $a^4 = 16$

Assim, $a = -2$



(ii) Quando $a > 0$,

$$S = -\int_0^a (x^3 - ax^2)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= \frac{a^4}{12} = \frac{4}{3}$$

Portanto, $a^4 = 16$

Assim, $a = 2$

De (i) e (ii),

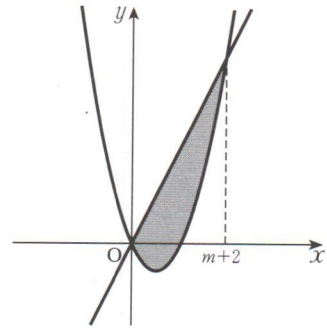
$\boldsymbol{a = \pm 2}$

L 153a KUMON Áreas II

(25 pontos)

1. A reta $y = mx$, que passa pela origem e a parábola $y = x^2 - 2x$, limitam a região cuja área S, é $\frac{32}{3}$. Encontre o valor de m pelo método a seguir. Assuma $m > 0$.

(1) Encontre as coordenadas x dos pontos de intersecção de $y = mx$ e $y = x^2 - 2x$.



[Res.] De $mx = x^2 - 2x$,

$x^2 - (m+2)x = x[x-(m+2)] = 0$

Portanto, $\boldsymbol{x = 0,\ m+2}$

(2) Expresse a área, S, em termos de m.

[Res.] $\boldsymbol{S} = \int_0^{m+2} [mx - (x^2 - 2x)]dx$

$= -\int_0^{m+2} [x^2 - (m+2)x]dx$

$= -\int_0^{m+2} x[x-(m+2)]dx$

$= \frac{1}{6}(m+2-0)^3$

$= \boldsymbol{\frac{1}{6}(m+2)^3}$

(3) Encontre o valor de m de forma que a área, $S = \frac{32}{3}$.

[Res.] De $\frac{1}{6}(m+2)^3 = \frac{32}{3}$,

$(m+2)^3 = 64$

$m + 2 = 4$

Portanto, $\boldsymbol{m = 2}$

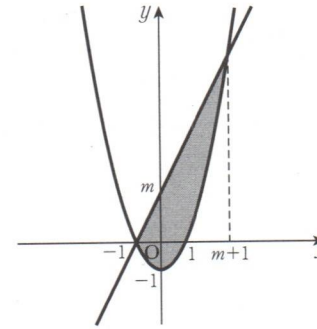
2. Encontre o valor de m de forma que a reta $y = m(x+1)$, que passa pelo ponto $(-1,\ 0)$ e a parábola $y = x^2 - 1$, limitem a região cuja área, S, seja $\frac{9}{2}$. Assuma $m > 0$.

[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção de $y = m(x+1)$ e $y = x^2 - 1$:

De $m(x+1) = x^2 - 1$,

$x^2 - mx - (m+1) = (x+1)[x-(m+1)] = 0$

$x = -1,\ m+1$



Portanto,

$$S = \int_{-1}^{m+1} [m(x+1) - (x^2-1)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{m+1} (-x^2 + mx + m + 1)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{m+1} (x^2 - mx - m - 1)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{m+1} (x+1)[x-(m+1)]\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(m+2)^3 = \frac{9}{2}$$

Portanto,

$(m+2)^3 = 27$

$m+2 = 3$

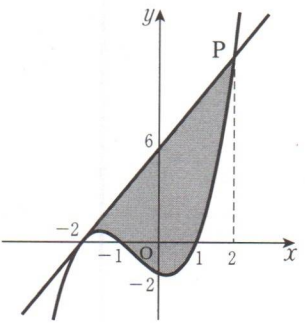
Assim, $\boldsymbol{m = 1}$

L154a KUMON Áreas II

(25 pontos)

1. Encontre a área, S, limitada pela a curva $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ e a reta tangente a esta curva no ponto $(-2,\ 0)$ pelo método a seguir.

(1) Encontre a equação da tangente.



[Res.] Seja $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$, $f'(-2) = 3$

Portanto,

$y = 3[x-(-2)]$ ☜ Desde que a reta tenha inclinação 3 e passe pelo ponto $(-2,\ 0)$.

$= 3(x+2)$

$= 3x + 6$

Assim, $\boldsymbol{y = 3x + 6}$

(2) Encontre a coordenada x do ponto de intersecção P, além do ponto de tangência.

[Res.] $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 3x + 6$

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

$(x+2)^2(x-2) = 0$

Portanto, $\boldsymbol{x = 2}$

(3) Encontre a área, S, limitada entre a curva e a tangente.

[Res.] $\boldsymbol{S} = \int_{-2}^{2} [3x + 6 - (x^3 + 2x^2 - x - 2)]dx$

$= \int_{-2}^{2} (-x^3 - 2x^2 + 4x + 8)dx$

$= 2\int_{0}^{2} (-2x^2 + 8)dx$

$= 2\left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x\right]_0^2$

$= 2\left(-\frac{16}{3} + 16\right) = \boldsymbol{\frac{64}{3}}$

2. Encontre a área, S, limitada pela curva $y = x^3 - 4x$ e a reta tangente a esta curva no ponto $(1, -3)$.

[Res.] Seja $f(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 4$, $f'(1) = -1$

Portanto, como a reta passa pelo ponto $(1, -3)$,

$y = -(x-1) - 3$

$= -x - 2$

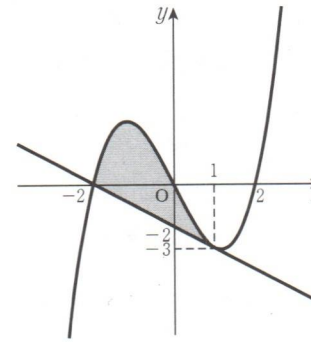
Encontrando a coordenada x do ponto de intersecção, além do ponto de tangência,

$x^3 - 4x = -x - 2$

$x^3 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)^2(x+2) = 0$

$x = -2$



Portanto,

$$S = \int_{-2}^{1} [x^3 - 4x - (-x-2)]dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - (4 - 6 - 4)$$

$$= \frac{27}{4}$$

L155a KUMON Áreas II

(25 pontos)

1. Dado que a curva $y = x^3$ tem uma tangente que passa pelo ponto $(0, 2)$, encontre a área limitada pela curva e a reta, pelo seguinte método.

(1) Encontre a equação da tangente.

[Res.] Seja $f(x) = x^3$, e seja o ponto de tangência (t, t^3).

$f'(x) = 3x^2$, $f'(t) = 3t^2$

A equação da tangente é:

$y = 3t^2(x-t) + t^3$ ☜ Desde que a tangente tenha inclinação $3t^2$ e passe pelo ponto (t, t^3).

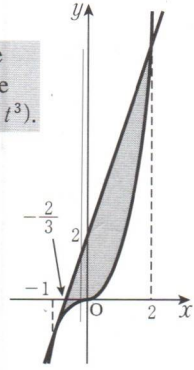
$= 3t^2x - 2t^3$ $\cdots$①

Como a reta passa por $(0, 2)$,

de $2 = -2t^3$,

$t = -1$

Portanto, $\boldsymbol{y = 3x + 2}$ ☜ Substituindo $t = -1$ em ①.



(2) Encontre as coordenadas x dos pontos de intersecção entre a curva e a tangente.

[Res.] $x^3 = 3x + 2$

$x^3 - 3x - 2 = 0$

$(x+1)^2(x-2) = 0$

$\boldsymbol{x = -1, 2}$

(3) Encontre a área, S, limitada entre a curva e a tangente.

[Res.] $\boldsymbol{S} = \int_{-1}^{2} (3x + 2 - x^3)\,dx$

$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^{2}$

$= (-4 + 6 + 4) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2 \right) = \boldsymbol{\frac{27}{4}}$

2. Encontre a área, S, limitada pela curva $y = x^3 - x^2 - 2x$ e a tangente que passa pelo ponto $(0, -1)$.

[Res.] Seja $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, e seja o ponto de tangência $(t,\ t^3 - t^2 - 2t)$.

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$, $f'(t) = 3t^2 - 2t - 2$

A equação da tangente é:

$$y = (3t^2 - 2t - 2)(x - t) + t^3 - t^2 - 2t$$
$$= (3t^2 - 2t - 2)x - 2t^3 + t^2$$

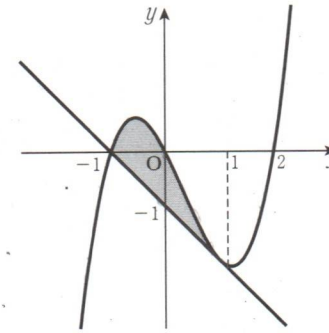
Como a reta passa por $(0,\ -1)$,

de $-1 = -2t^3 + t^2$,

$2t^3 - t^2 - 1 = (t-1)(2t^2 + t + 1) = 0$

$2t^2 + t + 1 \neq 0$ e $t = 1$

Portanto, $y = -x - 1$



Encontrando as coordenadas x dos pontos em comum entre a curva e a tangente,

$x^3 - x^2 - 2x = -x - 1$

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1) = 0$

$x = -1,\ 1$

Portanto,

$$S = \int_{-1}^{1} [x^3 - x^2 - 2x - (-x - 1)]dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 - x + 1)dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} (-x^2 + 1)dx$$
$$= 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1$$
$$= 2\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

L156a KUMON Áreas II

(25 pontos)

1. Aplicando o seguinte método, encontre o valor de m, de forma que a área limitada pela parábola $y = 2x - x^2$ e o eixo x, seja dividida em duas partes iguais pela reta $y = mx$.

(1) Encontre a área, S, limitada por $y = 2x - x^2$ e o eixo x.

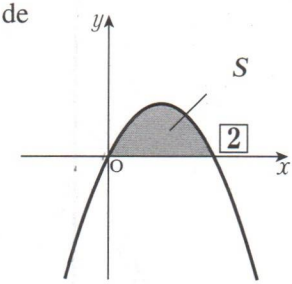
[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre $y = 2x - x^2$ e o eixo x:

De $2x - x^2 = x(2-x) = 0$, $x = 0,\ 2$

Portanto,

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)dx = -\int_0^2 x(x-2)dx$$

$$= \frac{1}{6}(2-0)^3 = \frac{4}{3}$$



(2) Encontre a área, S_1, limitada por $y = 2x - x^2$ e $y = mx$.

[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre $y = 2x - x^2$ e $y = mx$:

De $2x - x^2 = mx$, $x = 0,\ 2-m$

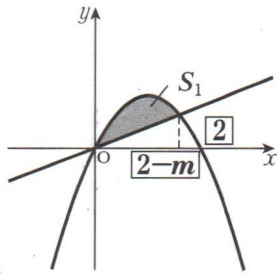
Portanto, o intervalo de valores de m é $0 < 2 - m <$ **2** .

Assim, **0** $< m <$ **2** . $\cdots$①

$$S_1 = \int_0^{2-m} (2x - x^2 - mx)dx$$

$$= -\int_0^{2-m} x[x-(2-m)]dx$$

$$= \frac{1}{6}[(2-m)-0]^3 = \frac{1}{6}(2-m)^3$$



(3) Encontre o valor de m, de forma que $S = 2S_1$.

[Res.] De (1) e (2),

$$\frac{4}{3} = 2 \cdot \frac{1}{6}(2-m)^3$$

Portanto, $(2-m)^3 = 4$

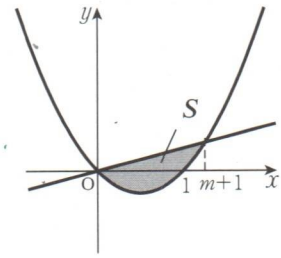
Assim, o valor de m que satisfaz a condição ① é $m =$ **2** $-\sqrt[3]{}$ **4** .

2. Encontre o valor de m, de forma que a área, S, limitada pela parábola $y = x^2 - x$ e a reta $y = mx$, seja dividida em duas partes iguais pelo eixo x. Assuma $m > 0$.

[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre $y = x^2 - x$ e $y = mx$:

De $x^2 - x = mx$, $x = 0,\ m+1$

Portanto,



$$S = \int_0^{m+1} [mx - (x^2 - x)]dx$$

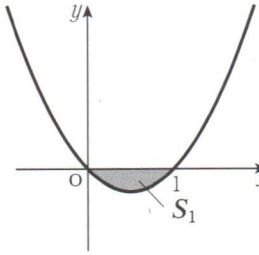
$$= -\int_0^{m+1} x[x - (m+1)]dx$$

$$= \frac{1}{6}[(m+1) - 0]^3 = \frac{1}{6}(m+1)^3$$

Encontrando os pontos de intersecção entre $y = x^2 - x$ e o eixo x:

De $x^2 - x = x(x-1) = 0$, $x = 0,\ 1$

Portanto,



$$S_1 = -\int_0^1 (x^2 - x)dx$$

$$= -\int_0^1 x(x-1)dx$$

$$= \frac{1}{6}(1-0)^3 = \frac{1}{6}$$

De $S = 2S_1$,

$$\frac{1}{6}(m+1)^3 = 2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$(m+1)^3 = 2$$

Portanto, $\boldsymbol{m = -1 + \sqrt[3]{2}}$

L157a KUMON Áreas II

(50 pontos)

1. Quando a área limitada pela curva $y=x(a-x)$ e o eixo x é S, e a área limitada pela curva $y=x^2(a-x)$ e o eixo x é S_1, encontre o valor de a para que $S=2S_1$. Assuma $0<a\leq 1$.

[Res.]

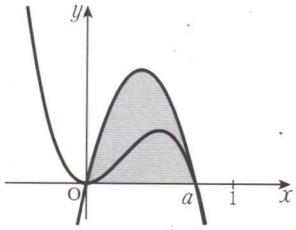
Encontrando os pontos de intersecção entre $y=x(a-x)$ e o eixo x:

De $x(a-x)=0$, $x=0$, a

Encontrando os pontos de intersecção entre $y=x^2(a-x)$ e o eixo x:

De $x^2(a-x)=0$, $x=0$, a

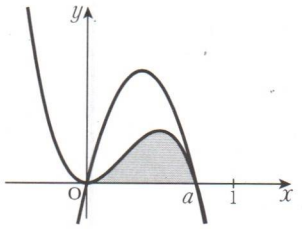
Portanto,



$$S=\int_0^a x(a-x)dx$$

$$=\int_0^a(-x^2+ax)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{6}$$



$$S_1=\int_0^a x^2(a-x)dx$$

$$=\int_0^a(-x^3+ax^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3\right]_0^a=-\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{3}=\frac{a^4}{12}$$

De $S=2S_1$,

$$\frac{a^3}{6}=2\cdot\frac{a^4}{12}$$

$$a^3(1-a)=0$$

$$a=0,\ 1$$

Como $0<a\leq 1$,

$$\boldsymbol{a=1}$$

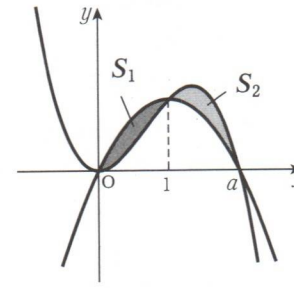
2. Encontre o valor de a, de forma que as duas regiões, S_1 e S_2, limitadas pelas curvas $y = x(a-x)$ e $y = x^2(a-x)$, tenham áreas iguais.
Assuma $a > 1$.

[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre $y = x(a-x)$ e $y = x^2(a-x)$:

De $x(a-x) = x^2(a-x)$,

$x(a-x)(x-1) = 0$

$x = 0,\ 1,\ a$



Portanto,

$$S_1 = \int_0^1 [x(a-x) - x^2(a-x)]dx$$

$$= \int_0^1 [x^3 - (a+1)x^2 + ax]dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{a+1}{3} + \frac{a}{2} = \frac{a}{6} - \frac{1}{12}$$

$$S_2 = \int_1^a [x^2(a-x) - x(a-x)]dx$$

$$= \int_1^a [-x^3 + (a+1)x^2 - ax]dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{a+1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right]_1^a$$

$$= \left(-\frac{a^4}{4} + \frac{a+1}{3}a^3 - \frac{a^3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{a+1}{3} - \frac{a}{2}\right) = \frac{a^4}{12} - \frac{a^3}{6} + \frac{a}{6} - \frac{1}{12}$$

De $S_1 = S_2$,

$$\frac{a}{6} - \frac{1}{12} = \left(\frac{a^4}{12} - \frac{a^3}{6} + \frac{a}{6} - \frac{1}{12}\right)$$

$a^3(a-2) = 0$

$a = 0,\ 2$

Como $a > 1$,

$\boldsymbol{a = 2}$

L158a KUMON Áreas II

(50 pontos)

Ex.

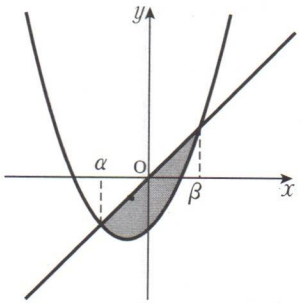
Encontre o valor de m que resulta em um valor mínimo da área, S, limitada pela parábola $y = x^2 + x - 1$ e a reta $y = mx$.

[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre $y = x^2 + x - 1$ e $y = mx$:

De $x^2 + x - 1 = mx$,

$x^2 + (1-m)x - 1 = 0 \quad \cdots ①$

Se as duas raízes de ① são α e β (onde $\alpha < \beta$),



$\alpha + \beta = \boxed{m-1}$, $\alpha\beta = \boxed{-1}$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} [mx - (x^2 + x - 1)]\,dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} [x^2 + (1-m)x - 1]\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$= \frac{1}{6}\left[\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}\,\right]^3$$

$$= \frac{1}{6}\left[\sqrt{(m - \boxed{1}\,)^2 + \boxed{4}}\,\right]^3$$

Há um valor mínimo quando $(m - \square)^2$ vale zero.

Portanto, $m = \boxed{1}$

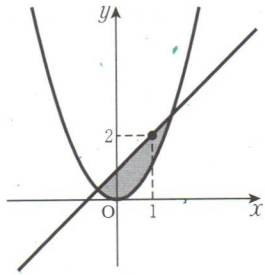
$m^2 - 2m + 5$

Respostas: na ordem $m-1$, -1, 1, 4, 1

L158b

1. Dada a região limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = m(x-1)+2$ que passa pelo ponto $(1, 2)$, encontre o valor de m que resulta em um valor mínimo da área, S, da região limitada.

[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre $y = x^2$ e $y = m(x-1)+2$:



De $x^2 = m(x-1)+2$,

$$x^2 - mx + m - 2 = 0 \quad \cdots ①$$

Se as duas raízes de ① são α e β (onde $\alpha < \beta$),

$$\alpha + \beta = m, \quad \alpha\beta = m - 2$$

$$S = \int_\alpha^\beta [m(x-1)+2-x^2]dx$$

$$= -\int_\alpha^\beta (x^2 - mx + m - 2)dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$= \frac{1}{6}\left[\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}\right]^3$$

$$= \frac{1}{6}\left[\sqrt{m^2 - 4(m-2)}\right]^3$$

$$= \frac{1}{6}\left[\sqrt{(m-2)^2 + 4}\right]^3$$

Portanto, $\boldsymbol{m = 2}$

$(\beta-\alpha)$

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\beta\alpha$

$\alpha^2 - 2\beta\alpha + \beta^2$

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2}$

$\left(\sqrt{(\beta-\alpha)}\right)^2$

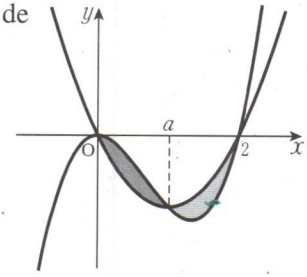
$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\beta\alpha + \beta^2$

L 159a KUMON Áreas II

(50 pontos)

1. Encontre o valor de a, de forma que a área, $S(a)$, limitada pelas curvas $y = x^2(x-2)$ e $y = ax(x-2)$, seja mínima. Assuma $0 < a < 2$.

[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre $y = x^2(x-2)$ e $y = ax(x-2)$:



De $x^2(x-2) = ax(x-2)$,

$x(x-2)(x-a) = 0$

$x = 0,\ a,\ 2$

Portanto,

$$S(a) = \int_0^a [x^2(x-2) - ax(x-2)]dx + \int_a^2 [ax(x-2) - x^2(x-2)]dx$$

$$= \int_0^a [x^3 - (a+2)x^2 + 2ax]dx + \int_a^2 [-x^3 + (a+2)x^2 - 2ax]dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+2}{3}x^3 + ax^2\right]_0^a + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{a+2}{3}x^3 - ax^2\right]_a^2$$

$$= \boldsymbol{-\frac{a^4}{6} + \frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}}$$

$$S'(a) = -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{4}{3} = \boldsymbol{-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)}$$

De $S'(a) = 0$,

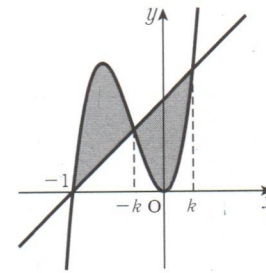
$a = 1,\ 1 \pm \sqrt{3}$ ☜ $0 < a < 2$ então $1 \pm \sqrt{3}$ são soluções inadequadas.

a	0	⋯	1	⋯	2
$S'(a)$	／	−	0	+	／
$S(a)$	／	↘	mínimo relativo	↗	／

Portanto, $a =$ **1**

L159b

2. Encontre o valor de k, de forma que a área, $S(k)$, limitada pela curva $y=x^2(x+1)$ e a reta $y=k^2(x+1)$, seja mínima.
Assuma $0<k<1$.



[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre
$y=x^2(x+1)$ e $y=k^2(x+1)$:
De $x^2(x+1)=k^2(x+1)$,
$(x+1)(x+k)(x-k)=0$
$x=-1,\ -k,\ k$

Portanto,

$$S(k)=\int_{-1}^{-k}[x^2(x+1)-k^2(x+1)]dx+\int_{-k}^{k}[k^2(x+1)-x^2(x+1)]dx$$

$$=\int_{-1}^{-k}(x^3+x^2-k^2x-k^2)dx+\int_{-k}^{k}(-x^3-x^2+k^2x+k^2)dx$$

$$=\int_{-1}^{-k}(x^3+x^2-k^2x-k^2)dx+2\int_{0}^{k}(-x^2+k^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{k^2}{2}x^2-k^2x\right]_{-1}^{-k}+2\left[-\frac{1}{3}x^3+k^2x\right]_{0}^{k}$$

$$=\left(\frac{k^4}{4}-\frac{k^3}{3}-\frac{k^4}{2}+k^3\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{k^2}{2}+k^2\right)+2\left(-\frac{k^3}{3}+k^3\right)$$

$$=-\frac{k^4}{4}+2k^3-\frac{k^2}{2}+\frac{1}{12}$$

De $S'(k)=-k^3+6k^2-k=-k(k^2-6k+1)=0$,
$k=0,\ 3\pm2\sqrt{2}$

k	0	⋯	$3-2\sqrt{2}$	⋯	1
$S'(k)$	／	−	0	+	／
$S(k)$	／	↘	mínimo relativo	↗	／

Portanto, $\boldsymbol{k=3-2\sqrt{2}}$

L 160a KUMON Áreas II

(50 pontos)

1. Encontre a equação de alguma reta, que passe pelo ponto $(0,\ 1)$, de forma que a área, S, limitada por esta reta e a parábola $y = x^2$, seja igual a $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$.

[Res.] Seja a equação da reta $y = mx + 1$.

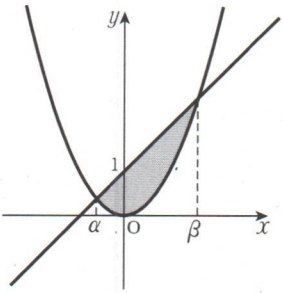
Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre $y = x^2$ e $y = mx + 1$:

De $x^2 = mx + 1$,

$x^2 - mx - 1 = 0$

Se as duas raízes da equação são α e β (onde $\alpha < \beta$),

$\alpha + \beta = m,\ \alpha\beta = -1$



Portanto,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} [(mx+1) - x^2]\,dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - mx - 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$= \frac{1}{6}\left[\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}\,\right]^3$$

$$= \frac{1}{6}(\sqrt{m^2+4})^3 = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

Portanto,

$(\sqrt{m^2+4})^3 = 5\sqrt{5}$

$m^2 + 4 = 5$

$m^2 = 1$

Portanto, $m = \pm 1$

Assim, $\boldsymbol{y = x+1,\ y = -x+1}$

L 160b

2. Encontre a área, S, limitada pela curva $y = x^3 - 7x$ e a reta tangente desta curva, no ponto $(-1,\ 6)$.

[Res.] Seja $f(x) = x^3 - 7x$

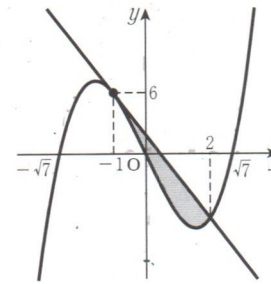
$f'(x) = 3x^2 - 7,\ f'(-1) = -4$

Portanto, como a reta passa pelo ponto $(-1,\ 6)$,

$y = -4(x+1) + 6$

$= -4x + 2$

Encontrando a coordenada x do ponto de intersecção, além do ponto de tangência:



$x^3 - 7x = -4x + 2$

$x^3 - 3x - 2 = 0$

$(x+1)^2(x-2) = 0$

$x = 2$

Portanto,

$$\mathbf{S} = \int_{-1}^{2} [-4x + 2 - (x^3 - 7x)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^{2}$$

$$= (-4 + 6 + 4) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2 \right)$$

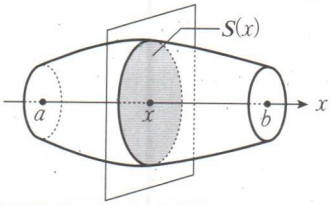
$$= \frac{27}{4}$$

L 161a KUMON Volumes

(50 pontos)

Se $S(x)$ é uma função de x representando a área seccionada de um sólido dado, cortado por um plano perpendicular ao eixo x, então o volume para $a \le x \le b$ é dado pela seguinte fórmula:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$



Ex.

Encontre o volume, V, de um cone com raio da base r, e altura h.

[Res.] Seja a origem, O, o vértice do cone original; seja o eixo x a altitude (a reta perpendicular que vai de O para a base); e seja $S(x)$ a área seccionada.

Se o raio do círculo seccionado (sombreado) for r',

de $r' : r = x : h$, $\quad r' = \dfrac{r}{h}x$

Portanto, área do círculo seccionado é:

$$S(x) = \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2}x^2$$

O intervalo dos valores de x é:

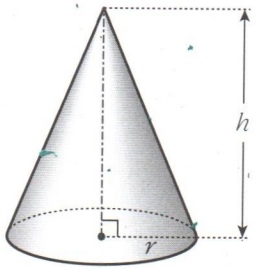
$$0 \le x \le h$$

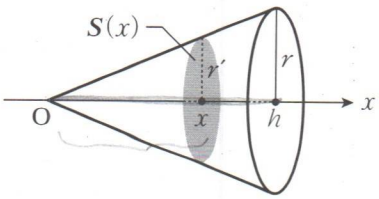
Portanto,

$$V = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2 dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\boxed{\frac{1}{3}x^3}\right]_0^h$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$$





Respostas: na ordem $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Definição: A distância perpendicular do vértice ao plano da base é a ***altitude*** do cone.

L16b

1. Quando um cone com raio da base medindo 5 e altura medindo 10, é dividido em 2 partes na altura 6, encontre o volume da região sombreada mostrada abaixo.

[Res.] Seja a origem, O, o vértice do cone original; seja o eixo x a altitude (a reta perpendicular que vai de O para a base); e seja $S(x)$ a área seccionada. Se o raio do círculo seccionado (sombreado) for r',

de r' : $\boxed{5}$ $= x :$ $\boxed{10}$,

$$r' = \boxed{\frac{1}{2}x}$$

Portanto,

$$S(x) = \pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{\pi}{4}x^2$$

O intervalo de valores de x é:

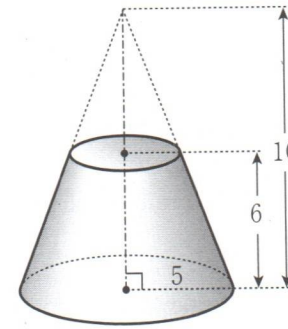
$$\boxed{4} \le x \le 10$$

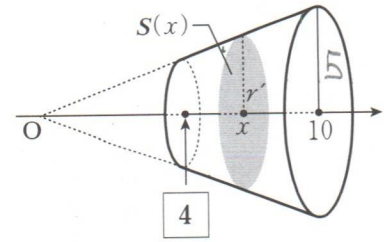
Portanto,

$$V = \int_4^{10} \frac{\pi}{4}x^2\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_4^{10}$$

$$= 78\pi$$





Definição: A parte do sólido entre dois planos paralelos cortando o sólido é chamado ***tronco***.

L I 62a KUMON **Volumes**

(50 pontos)

1. Encontre o volume, V, de uma pirâmide regular de quatro faces, cuja base quadrada possui o lado medindo a, e cuja altura é h.

[Res.] Seja a origem, O, o vértice da pirâmide original; seja o eixo x a altitude (a reta perpendicular que vai de O para a base); e seja $S(x)$ a área seccionada.

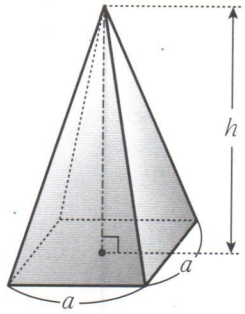
Se o comprimento do lado do quadrado seccionado for a',

de $a' : a =$ $\boxed{\boldsymbol{x}}$: $\boxed{\boldsymbol{h}}$,

$$a' = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{x}$$

Portanto, a área do quadrado seccionado é:

$$S(x) = \left(\frac{a}{h}x\right)^2 = \frac{\boldsymbol{a^2}}{\boldsymbol{h^2}}\boldsymbol{x^2}$$



O intervalo dos valores de x é:

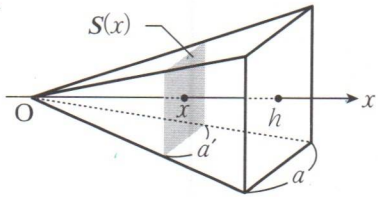
$0 \le x \le h$

Portanto,

$$\boldsymbol{V} = \int_0^h \frac{a^2}{h^2}x^2 dx$$

$$= \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h$$

$$= \frac{1}{3}\boldsymbol{a^2 h}$$



2. Quando uma pirâmide regular com quatro faces, cuja base quadrada tem o lado medindo 6, e cuja altura mede 9, é dividida em duas partes na altura 6 por um plano paralelo à base, encontre o volume, V, da região sombreada mostrada abaixo.

[Res.] Seja a origem, O, o vértice da pirâmede original; seja o eixo x a altitude (a reta perpendicular que vai de O para a base); e seja $S(x)$ a área seccionada.

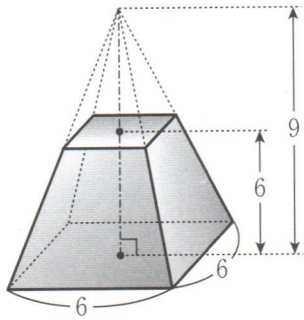
Se o comprimento do lado do quadrado seccionado for a',

de $a' : 6 = x : 9$,

$$a' = \frac{2}{3}x$$

Portanto, a área do quadrado seccionado é:

$$S(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{4}{9}x^2$$



O intervalo dos valores de x é:

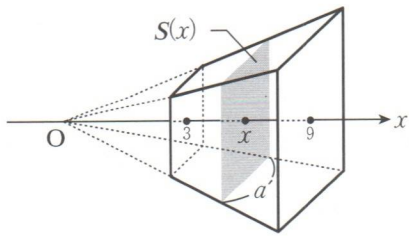
$$3 \le x \le 9$$

Portanto,

$$V = \int_3^9 \frac{4}{9}x^2 dx$$

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_3^9$$

$$= 104$$



L 163a KUMON Volumes

(50 pontos)

1. Encontre o volume, V, de uma esfera com raio a.

[Res.] Localizamos a origem no centro da esfera e determinamos o diâmetro como o eixo x. Quando a esfera é cortada por um plano perpendicular ao eixo x, determinamos a área seccionada, $S(x)$.

Se o raio do círculo seccionado for r,

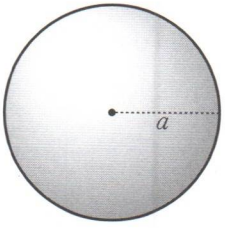
de $x^2+r^2=a^2$, $\quad r=\sqrt{a^2-x^2}$

Portanto, a área do círculo seccionado é:

$$S(x)=\pi r^2=\pi(a^2-x^2)$$

O intervalo dos valores de x é:

$$-a \le x \le a$$



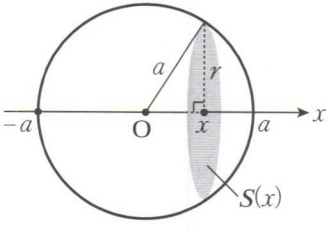
Portanto,

$$V=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx$$

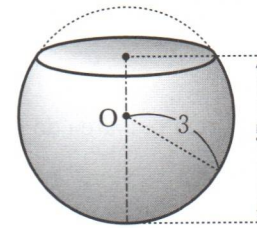
$$=2\pi\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3$$



2. Dado que uma esfera de raio 3 e centro em O é dividida em duas partes pelo plano perpendicular à reta que passa por O na altura 5, encontre o volume, V, da região sombreada abaixo.

[Res.] Como o centro da esfera original está em O, determinamos que a reta perpendicular à área seccionada é o eixo x, e seja $S(x)$ a área seccionada.



Se o raio do círculo seccionado for r,

$$r = \sqrt{3^2 - x^2} = \sqrt{9 - x^2}$$

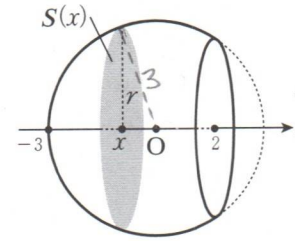
Portanto,
a área do círculo seccionado é:

$$S(x) = \pi(\sqrt{9-x^2})^2 = \pi(9-x^2)$$

O intervalo dos valores de x é:

$$-3 \le x \le 2$$

Portanto,



$$\boldsymbol{V} = \int_{-3}^{2} \pi(9-x^2)\,dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{2} (9-x^2)\,dx$$

$$= \pi\left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{2}$$

$$= \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{3}}\pi$$

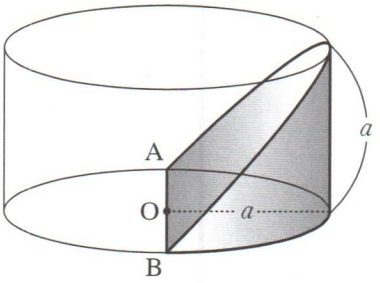
L 164a KUMON Volumes

(50 pontos)

1. Há um cilindro circular reto com raio da base e altura iguais a a. Quando cortamos o cilindro reto em duas partes, ao longo do plano que inclui o diâmetro AB e forma um ângulo de $45°$ com a base, encontre o volume do menor dentre os dois sólidos.

[Res.] Sendo a origem, o centro da base, e esteja o diâmetro AB ao longo do eixo x.

Cortamos esta peça com um plano que é perpendicular ao eixo x no ponto P, cuja coordenada x é x. A secção é um triângulo isósceles com ângulo reto.



De $PQ^2 + PO^2 = QO^2$,

$PQ = \sqrt{a^2 - x^2}$

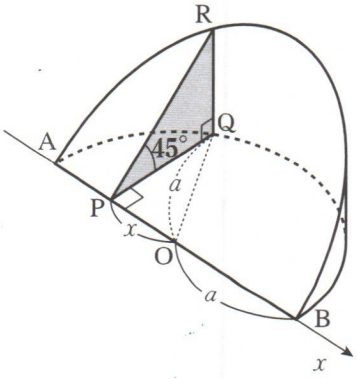
Como $QR = PQ$,

a área da secção é:

$$S(x) = \frac{1}{2} PQ \cdot QR$$

$$= \frac{1}{2} PQ^2$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - x^2)$$



O intervalo dos valores de x é:

$-a \le x \le \boxed{\boldsymbol{a}}$

Portanto,

$$V = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}(a^2 - x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)dx$$

$$= \left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= \frac{2}{3}\boldsymbol{a}^3$$

L 164b

raio da

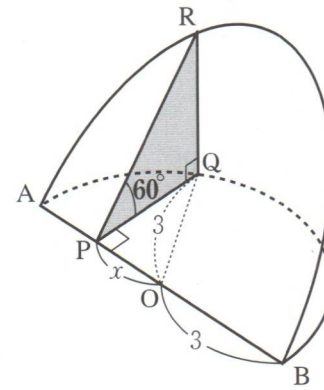
2. Há um cilindro circular reto com base 3 e altura 6. Quando cortamos o cilindro reto em duas partes, ao longo do plano que inclui o diâmetro AB e forma um ângulo de 60° com a base, encontre o volume do menor dentre os dois sólidos.

[Res.] Sendo a origem, o centro da base, e esteja o diâmetro AB ao longo do eixo x.

$\mathrm{PQ} = \sqrt{3^2 - x^2} = \sqrt{9 - x^2}$

$\mathrm{QR} = \sqrt{3}\,\mathrm{PQ}$

Portanto, a área da secção é:



$$S(x) = \frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{PQ}^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(9 - x^2)$$

O intervalo dos valores de x é:

$-3 \le x \le 3$

Portanto,

$$V = \int_{-3}^{3} \frac{\sqrt{3}}{2}(9 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\int_0^3 (9 - x^2)\,dx$$

$$= \sqrt{3}\left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3$$

$$= \sqrt{3}\,(27 - 9)$$

$$= 18\sqrt{3}$$

L 165a KUMON Volumes

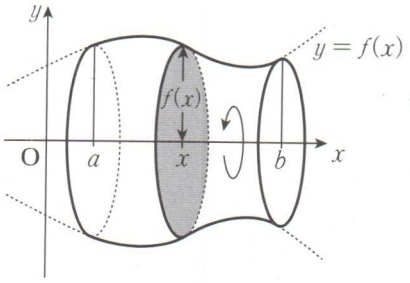
(50 pontos)

O sólido formado pela rotação de uma reta ou curva em torno dos eixos é chamado ***sólido de revolução***. Seja V o volume do sólido formado pela rotação da região limitada pela função $y = f(x)$, o eixo x, a reta $x = a$ e a reta $x = b$. Como a secção é um círculo, a área é:

$$S(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$$

Portanto, o volume, V, do sólido de revolução para $a \le x \le b$ é:

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



Ex.

O sólido formado pela rotação da região limitada pela reta $y = \frac{1}{2}x$, o eixo x e a reta $x = 6$ em torno do eixo x é um cone circular de base 3 e altura 6.

Encontre o volume, V, deste cone circular.

[Res.] Do gráfico,

$$0 \le x \le 6$$

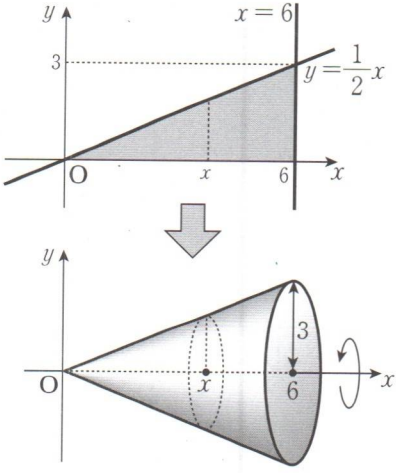
Portanto,

$$V = \pi \int_0^6 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^6 \frac{1}{4}x^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\boxed{\frac{1}{3}x^3}\right]_0^6$$

$$= \boxed{18\pi}$$



Respostas: na ordem $\frac{1}{3}x^3$, 18π

L165b

1. Encontre o volume, V, do sólido (o tronco do cone) formado pela rotação da região limitada pela reta $y=\frac{1}{3}x$, o eixo x, a reta $x=6$ e a reta $x=9$ em torno do eixo x.

[Res.] Do gráfico,

$\boxed{6} \le x \le \boxed{9}$

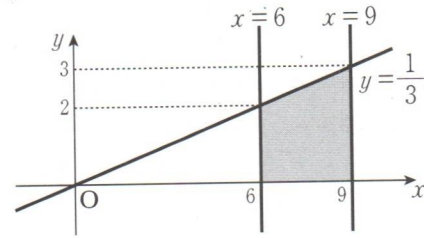
Portanto,

$$V=\pi\int_6^9\left(\frac{1}{3}x\right)^2dx$$

$$=\pi\int_6^9\frac{1}{9}x^2dx$$

$$=\frac{\pi}{9}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_6^9$$

$$=\mathbf{19\pi}$$



2. Encontre o volume, V, do sólido formado pela rotação da região limitada pela reta $y=x+1$, o eixo x e a reta $x=2$ em torno do eixo x.

[Res.] Do gráfico,

$-1 \le x \le 2$

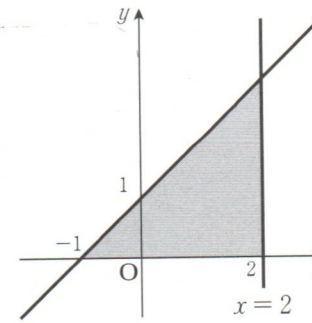
Portanto,

$$\boldsymbol{V}=\pi\int_{-1}^{2}(x+1)^2dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}(x^2+2x+1)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{2}$$

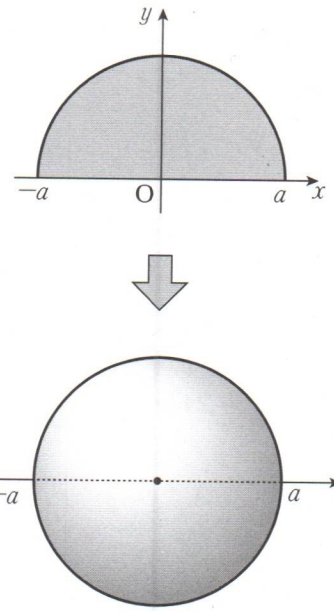
$$=\mathbf{9\pi}$$



L 166a KUMON Volumes

(50 pontos)

1. Um ponto no semicírculo pode ser representado por $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (onde $-a \leq x \leq a$). O sólido formado pela rotação da figura limitada por este semicírculo e o eixo x em torno do eixo x, é uma esfera. Encontre o volume, V, da esfera.



[Res.] Do gráfico,

$-a \leq x \leq a$

De $y^2 = \boxed{\boldsymbol{a^2 - x^2}}$,

$$V = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a$$

$$= 2\pi \left(a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right)$$

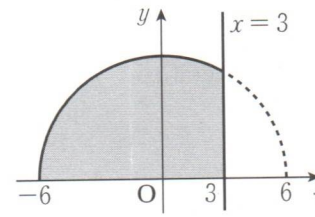
$$= \frac{4}{3} \boldsymbol{\pi a^3}$$

Compare este método com o método usado no L163a.

L166b

2. Encontre o volume, V, do sólido formado pela rotação da região limitada pelo semicírculo $y = \sqrt{36 - x^2}$ (onde $-6 \le x \le 6$), o eixo x e a reta $x = 3$ em torno do eixo x.

[Res.] Do gráfico,



$$-6 \le x \le 3$$

De $y^2 = 36 - x^2$,

$$V = \pi \int_{-6}^{3} (36 - x^2)\,dx$$

$$= \pi \left[36x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-6}^{3}$$

$$= [(108 - 9) - (-216 + 72)]\pi$$

$$= \mathbf{243\pi}$$

L 167a KUMON Volumes

(50 pontos)

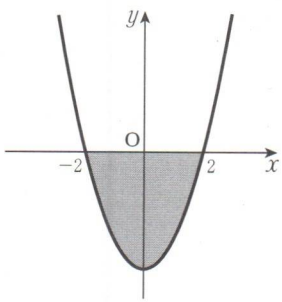
1. Encontre o volume, V, do sólido formado pela rotação da região limitada por $y = x^2 - 4$ e o eixo x em torno do eixo x.

[Res.] Encontrando os pontos de intersecção entre $y = x^2 - 4$ e o eixo x,

$x = \pm 2$

Do gráfico,

$-2 \leq x \leq 2$



Portanto,

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)^2 dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{2} (x^4 - 8x^2 + 16) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x \right]_0^2$$

$$= 2\pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right)$$

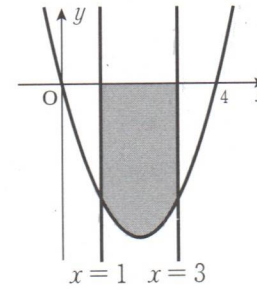
$$= \mathbf{\frac{512}{15}\pi}$$

2. Encontre o volume, V, do sólido formado pela rotação da região limitada por $y = x^2 - 4x$ e o eixo x, a reta $x = 1$ e a reta $x = 3$ em torno do eixo x.

[Res.] Do gráfico,

$1 \le x \le 3$

Portanto,



$$\boldsymbol{V} = \pi \int_1^3 (x^2 - 4x)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^3 (x^4 - 8x^3 + 16x^2) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{16}{3}x^3 \right]_1^3$$

$$= \pi \left[\left(\frac{243}{5} - 162 + 144 \right) - \left(\frac{1}{5} - 2 + \frac{16}{3} \right) \right]$$

$$= \mathbf{\frac{406}{15}\pi}$$

L 168a KUMON Volumes

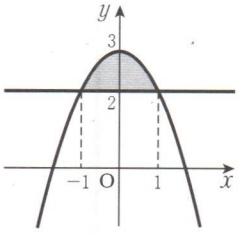
(50 pontos)

1. Encontre o volume, V, do sólido formado pela rotação da região limitada por $y = 3 - x^2$ e a reta $y = 2$ em torno do eixo x.

[Res.] Encontrando as coordendas x dos pontos de intersecção entre $y = 3 - x^2$ e $y = 2$,

$x = \pm 1$

Portanto,



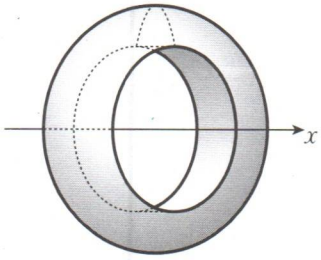
$$V = \pi \int_{-1}^{1} (3 - x^2)^2 dx - \pi \int_{-1}^{1} 2^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 - 6x^2 + 5) dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} (x^4 - 6x^2 + 5) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{5} x^5 - 2x^3 + 5x \right]_0^1$$

$$= \frac{32}{5} \pi$$

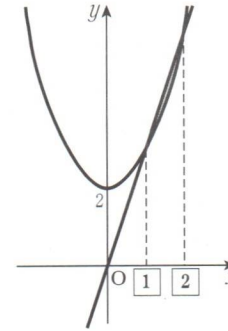


2. Encontre o volume, V, do sólido formado pela rotação da região limitada por $y = x^2 + 2$ e a reta $y = 3x$ em torno do eixo x.

[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre $y = x^2 + 2$ e $y = 3x$,

$x = 1,\ 2$

Portanto,



$$\boldsymbol{V} = \pi \int_1^2 (3x)^2 dx - \pi \int_1^2 (x^2+2)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^2 9x^2 dx - \pi \int_1^2 (x^4 + 4x^2 + 4) dx$$

$$= \pi \int_1^2 (-x^4 + 5x^2 - 4) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - 4x \right]_1^2$$

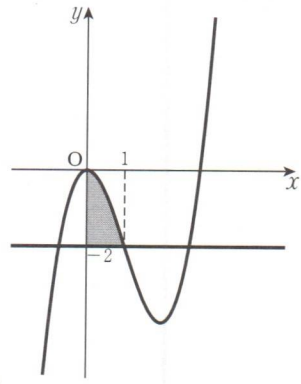
$$= \frac{\mathbf{22}}{\mathbf{15}}\boldsymbol{\pi}$$

L 169a KUMON Volumes

(50 pontos)

1. Encontre o volume, V, do sólido formado pela rotação da região sombreada (▭) limitada pela curva $y = x^3 - 3x^2$, a reta $y = -2$ e o eixo y em torno do eixo x.

[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre $y = x^3 - 3x^2$ e $y = -2$,



$$x^3 - 3x^2 = -2$$

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$x = 1,\ 1 \pm \sqrt{3}$$

Portanto,

$$\boldsymbol{V} = \pi \int_0^1 (-2)^2 dx - \pi \int_0^1 (x^3 + 3x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 4dx - \pi \int_0^1 (x^6 - 6x^5 + 9x^4) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (-x^6 + 6x^5 - 9x^4 + 4) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{7}x^7 + x^6 - \frac{9}{5}x^5 + 4x \right]_0^1$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{7} + 1 - \frac{9}{5} + 4 \right)$$

$$= \frac{107}{35}\pi$$

L169b

1. Encontre o volume, V, do sólido formado pela rotação da região sombreada (▭) limitada pela curva $y = x^3 + 1$, e a reta $y = x + 1$ em torno do eixo x.

[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre

$y = x^3 + 1$ e $y = x + 1$,

$x^3 + 1 = x + 1$

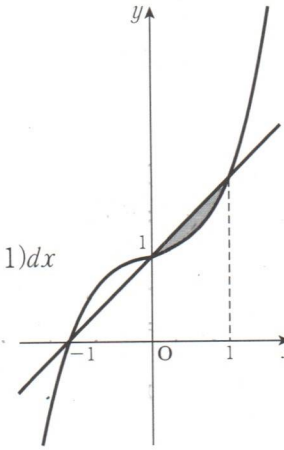
$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x(x+1)(x-1) = 0$

$x = -1,\ 0,\ 1$

Portanto,



$$\boldsymbol{V} = \pi\int_0^1 (x+1)^2 dx - \pi\int_0^1 (x^3+1)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^1 (x^2 + 2x + 1)dx - \pi\int_0^1 (x^6 + 2x^3 + 1)dx$$

$$= \pi\int_0^1 (-x^6 - 2x^3 + x^2 + 2x)dx$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^1$$

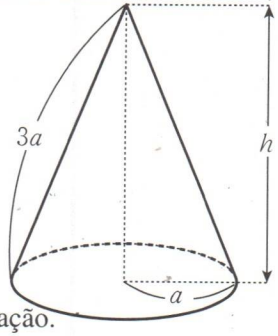
$$= \pi\left(-\frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{29}{42}\pi$$

L 170a KUMON Volumes

(33 pontos)

1. Dado um cone com raio a e comprimento da geratriz $3a$, encontre o volume, V, pelo seguinte método.



(1) Encontre a altura, h, do cone.

[Res.] $h^2 + a^2 = (3a)^2$

$h^2 = 8a^2$

$\boldsymbol{h = 2\sqrt{2}a}$

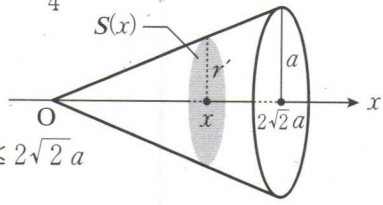
(2) Encontre o volume, V, do cone utilizando integração.

[Res.] Se o raio do círculo seccionado for r',

de $r' : a = x : 2\sqrt{2}a$, $\quad r' = \dfrac{a}{2\sqrt{2}a}x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x$

Portanto,

$$S(x) = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x\right)^2 = \frac{\pi}{8}x^2$$



O intervalo dos valores de x é $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}\,a$

Assim,

$$\boldsymbol{V} = \int_0^{2\sqrt{2}a} \frac{\pi}{8}x^2 dx = \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{2\sqrt{2}a}$$

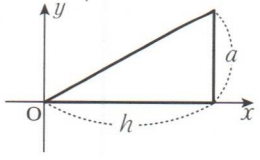
$$= \frac{\pi}{24}(16\sqrt{2}a^3) = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3}$$

Este método é chamado por "integração de uma área seccionada".

Solução Alternativa (por rotação)

$y = \dfrac{a}{h}x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x$

Usando a fórmula do L165a,



$$\boldsymbol{V} = \pi\int_0^{2\sqrt{2}a}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x\right)^2 dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^{2\sqrt{2}a} = \frac{16\sqrt{2}}{24}\pi a^3$$

$$= \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3}$$

Este método é chamado por "rotação da integral".

2. Encontre o volume, V, do sólido formado pela rotação da região limitada por $y = 4x - x^2$ e $y = x$ em torno do eixo x.

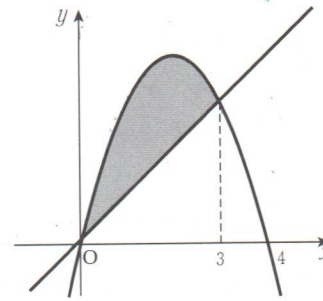
[Res.] Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção entre $y = 4x - x^2$ e $y = x$,

$4x - x^2 = x$,

$x^2 - 3x = 0$

$x = 0,\ 3$

Portanto,



$$\mathbf{V} = \pi \int_0^3 (4x - x^2)^2 dx - \pi \int_0^3 x^2 dx$$

$$= \pi \int_0^3 (x^4 - 8x^3 + 15x^2) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - 2x^4 + 5x^3 \right]_0^3$$

$$= \left(\frac{243}{5} - 162 + 135 \right) \pi$$

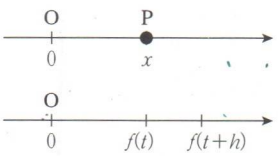
$$= \mathbf{\frac{108}{5} \pi}$$

L 171a KUMON Velocidade e Distância

(16 pontos)

Quando um ponto P se move numa reta numérica, então a posição x no tempo t, pode ser expressa como uma função $x = f(t)$. A ***velocidade média*** de P do tempo t para $t+h$ é dada pela seguinte fórmula:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$



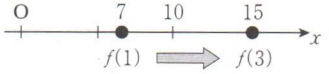
1. Complete as seguintes questões quando a posição do ponto P que se move na reta numérica é $x = f(t) = -t^2+8t$. (Assuma que as unidades de medida são metros para posição, segundos para tempo, e metros/segundo para velocidade.)

(1) Encontre a posição do ponto P, 1 segundo após a partida, e depois novamente 2 segundos após este instante. Depois encontre a velocidade média.

[Res.] $x = f(1) = \mathbf{7}$

$x = f(1+2) = f(3) = \mathbf{15}$

$$\frac{f(3)-f(1)}{2} = \frac{8}{2} = \mathbf{4}$$



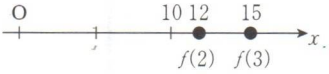
Res. **4** m/s

(2) Encontre a posição do ponto P, 2 segundos após a partida, depois novamente 1 segundo após este instante. Depois, encontre a velocidade média.

[Res.] $x = f(2) = 12$

$x = f(2+1) = f(3) = 15$

$$\frac{f(3)-f(2)}{1} = \frac{3}{1} = 3$$



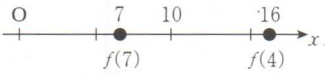
Res. **3** m/s

(3) Encontre a posição do ponto P, 4 segundos após a partida, e depois novamente 3 segundos após este instante. Depois, encontre a velocidade média.

[Res.] $x = f(4) = 16$

$x = f(4+3) = f(7) = 7$

$$\frac{f(7)-f(4)}{3} = -\frac{9}{3} = -3$$



Res. **−3** m/s

Usando a fórmula para a velocidade média da folha a, o valor do limite quando $h \to 0$, ou seja, $\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f'(t)$, é chamado de ***velocidade*** do ponto P no tempo t. Se a posição do ponto P é $x = f(t)$, podemos expressar a velocidade do ponto P por:

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

$\frac{dx}{dt}$ denota "a derivada de x com relação a t".

Ex.

Complete as seguintes questões quando a posição do ponto P que se move numa reta numérica é $x = f(t) = -t^2 + 8t$. (As unidades são metros e segundos.)

(1) Expresse a velocidade, v, do ponto P em função do tempo t.

[Res.] $v = \frac{dx}{dt} = (-t^2 + 8t)' = -2t + 8$

(2) Encontre a velocidade do ponto P, 3 segundos após a partida.

[Res.] $v = -2 \times 3 + 8 = 2$

Res. 2 m/s

2. Complete as seguintes questões quando a posição do ponto P que se move numa reta numérica é $x = f(t) = t^3 - 3t^2$. (As unidades são metros e segundos.)

(1) Expresse a velocidade, v, do ponto P em função do tempo t.

$$v = \frac{dx}{dt} = \mathbf{3t^2 - 6t}$$

Res. $v = \mathbf{3t^2 - 6t}$

(2) Encontre a velocidade do ponto P, 1 segundo após a partida.

$$v = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 = \mathbf{-3}$$

Res. $\mathbf{-3}$ m/s

(3) Encontre a velocidade do ponto P, 4 segundos após a partida.

$$v = 3 \times 4^2 - 6 \times 4 = \mathbf{24}$$

Res. **24** m/s

Quando o ponto P se move na reta numérica para a direita, o valor da velocidade é positivo.
Quando o ponto P se move na reta numérica para a esquerda, o valor da velocidade é negativo.
A velocidade também pode ser chamada de "mudança estimada de posição".

L I72a KUMON Velocidade e Distância

(14 pontos)

1. Um trem correndo numa linha férrea reta aciona o freio, e depois viaja uma distância de x metros em t segundos, onde $x = 28t - 0,56t^2$.

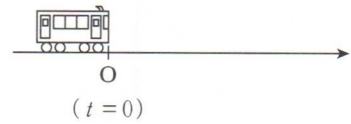
(1) Expresse a velocidade do trem, v, após t segundos, em função de t.

[Res.] $v = \dfrac{dx}{dt} = \mathbf{28 - 1,12t}$

Res. $v = \mathbf{28 - 1,12t}$

(2) Encontre a velocidade do trem, no tempo em que o freio for acionado.

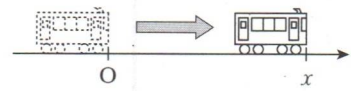
[Res.] Quando acionaram o freio,
o tempo se tornou $t = 0$.
Portanto, $v = 28 - 1,12 \times 0 = 28$



Res. **28** m/s

(3) Determine quantos segundos levará para o trem parar, depois que o freio for acionado? (O tempo quando a velocidade se torna $v = 0$.)

[Res.] De $v = 28 - 1,12t = 0$,
$t = 25$



Res. **25** s

(4) Encontre a distância que o trem percorrerá antes de parar, depois que o freio for acionado.

[Res.] $x = 28 \times 25 - 0,56 \times 25^2$
$= 350$

Res. **350** m

2. Um trem correndo numa linha férrea reta aciona o freio, e depois viaja uma distância de x metros em t segundos, onde $x = 27t - 0,45t^2$.

(1) Encontre a velocidade do trem, 10 segundos após ter acionado o freio.

[Res.] De $v = \dfrac{dx}{dt} = 27 - 0,9t$,

$v = 27 - 0,9 \times 10 = 18$

Res. **18 m/s**

(2) Encontre a distância que o trem percorrerá antes de parar, depois que o freio for acionado.

[Res.] De $v = 27 - 0,9t = 0$,

$t = 30$

Portanto,

$x = 27 \times 30 - 0,45 \times 30^2 = 405$

Res. **405 m**

3. Outro trem alcança a velocidade máxima, 50 segundos após começar a se movimentar. Durante este tempo, percorre uma distância de x metros, onde $x = 0,25t^2$. Encontre a velocidade máxima deste trem, e a distância percorrida antes de alcançar a velocidade máxima.

[Res.] Expressando a velocidade do trem, v, como derivada em relação ao tempo, t,

De $v = \dfrac{dx}{dt} = 0,5t$,

$v = 0,5 \times 50 = 25$

$x = 0,25 \times 50^2 = 625$

Res. Velocidade máxima: **25 m/s** Distância: **625 m**

L 173a KUMON Velocidade e Distância

(12 pontos)

1. Uma bola é lançada perpendicularmente para cima a partir do solo, numa altura h metros em t segundos, onde $h = 24,5t - 4,9t^2$.

(1) Expresse a velocidade da bola v, após t segundos, em função de t.

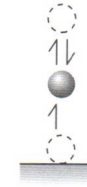
[Res.] $v = \dfrac{dh}{dt} = \mathbf{24,5 - 9,8}\boldsymbol{t}$

Res. $v = \mathbf{24,5 - 9,8}\boldsymbol{t}$

(2) Encontre a velocidade da bola no tempo 2 segundos.

[Res.] $v = 24,5 - 9,8 \times 2 = 4,9$

Res. **4,9** m/s



(3) Encontre a velocidade da bola no tempo 4 segundos.

[Res.] $v = 24,5 - 9,8 \times 4 = -14,7$

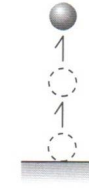
Res. **−14,7** m/s

(4) Determine quantos segundos levará para a bola alcançar a altura máxima. (O tempo que leva para que a velocidade se torne $v = 0$.)

[Res.] De $v = 24,5 - 9,8t = 0$,

$t = 2,5$

Res. **2,5** s



(5) Determine o tempo e velocidade da bola ao atingir o solo novamente. (O tempo e a velocidade quando a altura $h = 0$.)

[Res.] De $h = 24,5t - 4,9t^2 = 0$,

$t = 5$

Portanto,

$v = 24,5 - 9,8 \times 5 = -24,5$

Uma solução ($t = 0$) corresponde ao tempo do lançamento.

Res. Tempo: **5** s, Velocidade: **−24,5** m/s

2. Uma bola é lançada perpendicularmente para cima a partir do solo, numa altura de h metros em t segundos, onde $h = 29,4t - 4,9t^2$.

(1) Encontre a velocidade e altura da bola no tempo 2 segundos.

[Res.] $v = \dfrac{dh}{dt} = 29,4 - 9,8t$

$v = 29,4 - 9,8 \times 2 = 9,8$

$h = 29,4 \times 2 - 4,9 \times 2^2 = 39,2$

Res. Velocidade: **9,8 m/s** Altura: **39,2 m**

(2) Encontre a altura máxima que a bola alcança.

[Res.] De $v = 29,4 - 9,8t = 0$,

$t = 3$

Portanto,

$h = 29,4 \times 3 - 4,9 \times 3^2 = 44,1$

Res. **44,1 m**

(3) Encontre a velocidade da bola ao atingir o solo novamente.

[Res.] De $h = 29,4t - 4,9t^2 = 0$,

$t = 6$

Uma solução ($t = 0$) corresponde ao tempo do lançamento.

Portanto,

$v = 29,4 - 9,8 \times 6 = -29,4$

Res. **$-29,4$ m/s**

L174a KUMON Velocidade e Distância

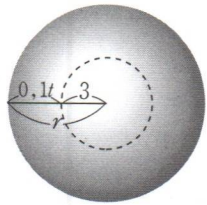
(20 pontos)

1. Um balão esférico tem um raio original de 3 cm, que aumenta na proporção de 0,1 cm por segundo ($\frac{1}{10}$ cm/s), depois que começa a encher.

(1) Encontre a área da superfície após t segundos.

[Res.] Em t segundos, seja r o raio, e seja S a área da superfície.

$$r = 3 + 0,1t = 3 + \frac{1}{10}t$$



Portanto,

$$S = 4\pi r^2$$
$$= 4\pi\left(3 + \frac{1}{10}t\right)^2$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{25}t^2 + \frac{12\pi}{5}t + 36\pi}$$

Res. $\boldsymbol{\frac{\pi}{25}t^2 + \frac{12\pi}{5}t + 36\pi}$ cm^2

(2) Encontre a razão de crescimento da área da superfície no tempo 10 segundos.

[Res.] De $v = \frac{dS}{dt} = \boxed{\frac{2\pi}{25}}t + \boxed{\frac{12\pi}{5}}$,

$$v = \frac{2\pi}{25} \times 10 + \frac{12\pi}{5} = \frac{16\pi}{5}$$

A área da superfície está crescendo na razão de 10,05... cm^2 por segundo (após 10 segundos).

Res. $\boldsymbol{\frac{16\pi}{5}}$ cm^2/s

(3) Encontre depois de quantos segundos o raio se aproxima de 5 cm, e a razão de crescimento da área da superfície neste tempo.

[Res.] De $r = 3 + \frac{1}{10}t = 5$,

$$t = 20$$
$$v = \frac{2\pi}{25} \times 20 + \frac{12\pi}{5} = \frac{8\pi}{5} + \frac{12\pi}{5} = 4\pi$$

A área agora está crescendo na razão de 12,56... cm^2 por segundo (após 20 segundos).

Res. Em **20** s, **4π** cm^2/s

2. Um balão esférico com um raio original de 2 cm, tem raio r, que aumenta na proporção de 2 cm por segundo. Encontre a razão de alteração do volume quando o raio atinge 10 cm.

[Res.] Em t segundos, seja r o raio, e seja V o volume.

$$r = \boxed{2+2t} \qquad \cdots ①$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(\quad 2+2t \quad)^3 = \frac{32}{3}\pi t^3 + 32\pi t^2 + 32\pi t + \frac{32}{3}\pi$$

$$v = \frac{dV}{dt} = 32\pi t^2 + 64\pi t + 32\pi \qquad \cdots ②$$

Substituindo raio de 10 cm em ①,

$10 = 2 + 2t$

$t = 4$

Substituindo este valor em ② para encontrar a razão de alteração do volume,

$v = 32\pi \times 4^2 + 64\pi \times 4 + 32\pi = 800\pi$

Res. 800π cm^3/s

3. Quando uma pedra é jogada num lago calmo, ondas circulares, que têm o mesmo centro, são criadas. Encontre a razão de crescimento da área da superfície que é limitada pela onda externa no tempo 4 segundos, dado que seu raio cresce em 1 m/s.

[Res.] Em t segundos, seja r o raio, e seja S a área da superfície limitada pela onda externa.

$r = t$

Portanto,

$S = \pi r^2 = \pi t^2$

$v = \frac{dS}{dt} = 2\pi t$

Quando $t = 4$,

$v = 2\pi \times 4 = 8\pi$

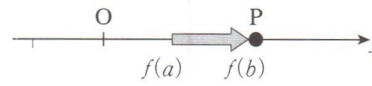
Res. 8π m^2/s

L I 75a KUMON Velocidade e Distância

(25 pontos)

Dado um ponto P que se move numa reta numérica, se a posição no tempo t for $x = f(t)$, a velocidade v será:

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$



Portanto, o deslocamento (a mudança de posição) do ponto P de $t = a$ para $t = b$ pode ser encontrado como segue:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt = \int_a^b v dt$$

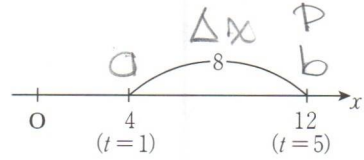
Ex.

Um ponto P que se move numa reta numérica com velocidade $v = 14 - 4t$, está em $x = 4$ quando $t = 1$. Encontre a posição, x, quando $t = 5$.

[Res.] O deslocamento do ponto P é:

$$\Delta x = f(5) - f(1) = \int_1^5 (14 - 4t)dt$$

$$= \left[14t - 2t^2\right]_1^5 = 8$$



Portanto, a posição do ponto P é:

$x = 4 + 8 = 12$

Res. $x = 12$

1. Um ponto P que se move numa reta numérica com velocidade $v = 20 - 4t$, está em $x = 0$ quando $t = 5$. Encontre a posição, x, quando $t = 7$.

[Res.] O deslocamento do ponto P é:

$$f(7) - f(5) = \int_5^7 (20 - 4t)dt$$

$$= \left[20t - 2t^2\right]_5^7 = -8$$

Um deslocamento negativo representa um movimento para a esquerda.

Portanto, a posição do ponto P é:

$x = 0 - 8 = -8$

Res. $\boldsymbol{x = -8}$

2. Um ponto P que se move numa reta numérica com velocidade $v = 2t - 6$, está em $x = 8$ quando $t = 1$. Encontre a posição, x, quando $t = 4$.

[Res.] O deslocamento do ponto P é:

$$f(4) - f(1) = \int_1^4 (2t - 6)dt$$

$$= \left[t^2 - 6t\right]_1^4 = -3$$

Portanto, a posição do ponto P é:

$$x = 8 - 3 = 5$$

Res. $\boldsymbol{x = 5}$

3. Dado que uma bola é lançada do solo para o alto com a velocidade de 30 m/s, e após t segundos, sua velocidade é $v = 30 - 10t$ (m/s).

(1) Encontre a altura da bola no tempo 2 segundos depois do lançamento.

[Res.] $h = \int_0^2 v dt = \int_0^2 (30 - 10t)dt = \left[30t - 5t^2\right]_0^2 = 40$

Res. **40 m**

(2) Encontre a altura máxima que a bola atinge.

[Res.] Encontrando o tempo t quando a bola atinge a altura máxima:

De $v = 30 - 10t = 0$,

$$t = 3$$

Portanto, a bola atinge a altura máxima após 3 segundos.

$$h = \int_0^3 (30 - 10t)dt = \left[30t - 5t^2\right]_0^3 = 45$$

Res. **45 m**

L176a KUMON Velocidade e Distância

(33 pontos)

Ex.

Um ponto P está se movendo numa reta numérica, e depois de t segundos sua velocidade, v cm/s, é $v = 20 - 4t$. Encontre a distância exata pecorrida pelo ponto P desde o tempo inicial até 7 segundos.

[Res.] De $v = 20 - 4t = -4(t-5)$,

$$\begin{cases} \text{Quando } 0 \le t \le 5, & v \ge 0 \\ \text{Quando } t \ge 5, & v \le 0 \end{cases}$$

Movendo para a direita (sentido +)

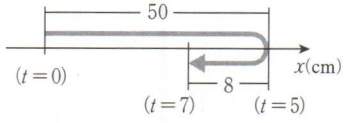
Movendo para a esquerda (sentido −)

Portanto, sendo s a distância percorrida depois de 7 segundos,

$$s = \int_0^5 (20-4t)dt + \int_5^7 (-20+4t)dt$$

$$= \left[20t - 2t^2\right]_0^5 + \left[-20t + 2t^2\right]_5^7$$

$$= 50 + 8 = 58$$



Res. 58 cm

1. Um ponto P está se movendo numa reta numérica com velocidade, v cm/s, onde $v = 4t - 12$. Encontre a distância exata percorrida pelo ponto desde o tempo inicial até 8 segundos.

[Res.] De $v = 4t - 12 = 4(t-3)$,

$$\begin{cases} \text{Quando } 0 \le t \le 3, & v \le 0 \\ \text{Quando } t \ge 3, & v \ge 0 \end{cases}$$

Portanto, sendo s a distância percorrida depois de 8 segundos,

$$s = \int_0^3 (-4t+12)dt + \int_3^8 (4t-12)dt$$

$$= \left[-2t^2 + 12t\right]_0^3 + \left[2t^2 - 12t\right]_3^8$$

$$= 18 + 50 = 68$$

Res. **68 cm**

De um modo geral, dado um ponto P que se move no tempo t com velocidade v, a distância s, percorrida do tempo $t = a$ para $t = b$ pode ser representada pela seguinte fórmula:

$$s = \int_a^b |v|dt$$

Nota: Distância percorrida é sempre positiva (ou zero).
Deslocamento pode ser positivo ou negativo (ou zero).

2. A velocidade, v cm/s, do ponto P é $v = 2t - t^2$. Encontre a distância que o ponto P percorre de 1 segundo para 3 segundos depois da partida inicial.

[Res.] De $v = 2t - t^2 = -t(t-2)$,

$$|v| = \begin{cases} 2t - t^2 & (\boxed{\mathbf{0}} \le t \le \boxed{\mathbf{2}}) \\ -2t + t^2 & (t \ge \boxed{\mathbf{2}}) \end{cases}$$

Portanto, sendo s a distância percorrida pelo ponto P,

$$s = \int_1^3 |v|dt = \int_1^2 (2t - t^2)dt + \int_2^3 (-2t + t^2)dt$$

$$= \left[t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_1^2 + \left[-t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_2^3$$

$$= \mathbf{2}$$

Res. **2 cm**

3. Dado que uma bola é lançada do solo para o alto com uma velocidade de 40 m/s, e após t segundos sua velocidade é $v = 40 - 10t$ (m/s). Encontre a real distância que a bola percorre 5 segundos após o lançamento.

[Res.] De $v = 40 - 10t = -10(t-4)$,

$$|v| = \begin{cases} 40 - 10t & (0 \le t \le 4) \\ -40 + 10t & (t \ge 4) \end{cases}$$

Portanto, sendo s a distância percorrida pela bola,

$$s = \int_0^5 |v|dt = \int_0^4 (40 - 10t)dt + \int_4^5 (-40 + 10t)dt$$

$$= \left[40t - 5t^2\right]_0^4 + \left[-40t + 5t^2\right]_4^5$$

$$= 85$$

Res. **85 m**

L I 77a KUMON Velocidade e Distância

(16 pontos)

1. A velocidade do ponto P em movimento no tempo t é $v = 12t - 3t^2$, e quando $t = 0$, o ponto P está na origem.

(1) Expresse a posição, x, do ponto P no tempo t, em função de t. (Recorra à nota do rodapé.)

[Res.] $x = \int_0^t v dt$

$$= \int_0^t (12t - 3t^2) dt = \left[6t^2 - t^3\right]_0^t = \mathbf{6t^2 - t^3}$$

Res. $x = \mathbf{6t^2 - t^3}$

(2) Em qual tempo t o ponto P retorna para a origem?

[Res.] Quando o ponto P retorna à origem, $x = 0$.

De $6t^2 - t^3 = t^2(6 - t) = 0$,

$t = 6$

Res. **após 6 segundos**

(3) Encontre a distância, s, que o ponto P percorre para retornar à origem?

[Res.] De $v = 12t - 3t^2 = -3t(t - 4)$,

$$|v| = \begin{cases} 12t - 3t^2 & (0 \le t \le 4) \\ -12t + 3t^2 & (t \ge 4) \end{cases}$$

Portanto,

$$s = \int_0^6 |v| dt$$

$$= \int_0^4 (12t - 3t^2) dt + \int_4^6 (-12t + 3t^2) dt$$

$$= \left[6t^2 - t^3\right]_0^4 + \left[-6t^2 + t^3\right]_4^6 = 64$$

Res. $s = \mathbf{64}$

Nota: A variável de integração é t, mas t também aparece no limite superior de integração. Assim a seguinte integral permanece em função de t, como é mostrada.

$$\int_0^t 2t dt = \left[t^2\right]_0^t = t^2$$

2. A velocidade do ponto P em movimento, no tempo t é $v = |4-t|$ (m/s).

(1) Sendo t o tempo em segundos, expresse a distância percorrida, em função de t, para $0 \le t \le 4$.

[Res.] $\int_0^t (4-t)dt = \left[4t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^t = 4t - \frac{1}{2}t^2$

Res. $\mathbf{4t - \frac{1}{2}t^2}$

(2) Sendo t o tempo em segundos, expresse a distância percorrida, em função de t, para $t \ge 4$.

[Res.] $\int_0^4 (4-t)dt + \int_4^t (-4+t)dt = \left[4t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^4 + \left[-4t + \frac{1}{2}t^2\right]_4^t$

$= \frac{1}{2}t^2 - 4t + 16$

Res. $\mathbf{\frac{1}{2}t^2 - 4t + 16}$

(3) Determine quanto tempo leva para o ponto P percorrer 26 m.

[Res.] Quando $0 \le t \le 4$, substituindo $t = 4$ no resultado de (1),

$4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$

Assim, a distância percorrida neste intervalo é muito pequena (ou seja, para a distância de 26 m; 8 é muito pouco).

Quando $t \ge 4$, sendo o resultado de (2) igual a 26,

$\frac{1}{2}t^2 - 4t + 16 = 26$

$t^2 - 8t - 20 = 0$

$t = -2,\ 10$

Portanto, $t = 10$ ($t = -2$ é inadequado pelas condições)

Res. **10 segundos**

L178a KUMON Velocidade e Distância

(20 pontos)

1. Há dois pontos em movimento, P e Q. No tempo t, em segundos, o ponto P tem a velocidade $u = 4t - 12$ (cm/s), e o ponto Q tem a velocidade $v = -2t + 12$ (cm/s). Dado que os pontos P e Q partem simultaneamente da origem, complete os seguintes exercícios.

(1) Encontre a posição do ponto P no tempo t seg.

[Res.] Seja x_1 a posição do ponto P, t segundos após a partida.

$$x_1 = \int_0^t u\,dt$$

$$= \int_0^t (4t - 12)\,dt$$

$$= \left[2t^2 - 12t\right]_0^t = \mathbf{2t^2 - 12t}$$

Res. $x_1 = \mathbf{2t^2 - 12t}$

(2) Encontre a posição do ponto Q no tempo t.

[Res.] Seja x_2 a posição do ponto Q, t segundos após a partida.

$$x_2 = \int_0^t v\,dt$$

$$= \int_0^t (-2t + 12)\,dt$$

$$= \left[-t^2 + 12t\right]_0^t = -t^2 + 12t$$

Res. $\boldsymbol{x_2 = -t^2 + 12t}$

(3) Determine em qual tempo (em segundos) os pontos P e Q se encontram novamente.

[Res.] De $x_1 = x_2$,

$$2t^2 - 12t = -t^2 + 12t$$

$$3t^2 - 24t = 0$$

Portanto, $t = 8$

Uma solução ($t = 0$) corresponde ao tempo de partida.

Res. **após 8 segundos**

L178b

2. Há dois pontos em movimento, P e Q. No tempo t, em segundos, ponto P tem velocidade $u=3t^2-6t$ (cm/s), e o ponto Q tem velocidade $v=-2t+3$ (cm/s). Dado que os pontos P e Q partem simultaneamente da origem, complete os seguintes exercícios.

(1) Determine em qual tempo (em segundos) os pontos P e Q se encontram novamente.

[Res.] Seja x_1 a posição do ponto P, e seja x_2 a posição do ponto Q, t segundos após a partida.

$$x_1=\int_0^t u\,dt=\int_0^t(3t^2-6t)dt=\Big[t^3-3t^2\Big]_0^t=t^3-3t^2$$

$$x_2=\int_0^t v\,dt=\int_0^t(-2t+3)dt=\Big[-t^2+3t\Big]_0^t=-t^2+3t$$

De, $x_1=x_2$,

$t^3-3t^2=-t^2+3t$

$t^3-2t^2-3t=0$

$t(t-3)(t+1)=0$

Estamos procurando pela solução $t>0$.

Portanto, $t=3$

Res. **após 3 segundos**

(2) Encontre a distância que o ponto P se move até reencontrar o ponto Q.

[Res.] De $u=3t^2-6t=3t(t-2)$,

$$|u|=\begin{cases}-3t^2+6t & (0\le t\le 2)\\ 3t^2-6t & (t\ge 2)\end{cases}$$

Portanto, a distância que o ponto P se move é:

$$\int_0^3|u|dt=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$$

$$=\Big[-t^3+3t^2\Big]_0^2+\Big[t^3-3t^2\Big]_2^3$$

$$=8$$

Res. **8 cm**

L179a KUMON Velocidade e Distância

(16 pontos)

1. Ao se fazer fluir a água armazenada em um tanque, tirando-se o tampão, a velocidade com que esta água flui após t minutos é $v = -t^2+6t$ (litros por minuto).

(1) Encontre a quantidade de água que fluiu nos primeiros t minutos.

[Res.] Seja V a quantidade de água que fluiu em t minutos.

$$V=\int_0^t v\,dt=\int_0^t(-t^2+6t)\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2\right]_0^t=\boldsymbol{-\frac{1}{3}t^3+3t^2}$$

Res. $\boldsymbol{-\frac{1}{3}t^3+3t^2}$ *l*

(2) Encontre a quantidade de água que fluiu nos primeiros 2 minutos após o tampão ter sido retirado.

[Res.] $V=-\frac{1}{3}\times 2^3+3\times 2^2=\frac{28}{3}$

Res. $\boldsymbol{\frac{28}{3}}$ *l*

(3) Encontre quanto tempo (em minutos) leva para toda água fluir. (ou seja, quantos minutos depois a velocidade se tornará $v=0$)

[Res.] De $v=-t^2+6t=-t(t-6)=0$,

$t=6$

Res. após **6** minutos

(4) Encontre a quantidade total de água que fluiu do tanque de água.

[Res.] Como toda a água fluirá em 6 minutos,

$$V=-\frac{1}{3}\times 6^3+3\times 6^2=36$$

Res. **36** *l*

L 179b

2. Ao se fazer fluir a água armazenada em um tanque, tirando-se o tampão, a velocidade com que esta água flui após t minutos é $v=-2t^2+18t$ (litros por minuto).

(1) Encontre a quantidade de água que fluiu nos primeiros 3 minutos após o tampão ter sido retirado.

[Res.] Seja V a quantidade de água que fluiu em t minutos.

$$V=\int_0^t v\,dt=\int_0^t(-2t^2+18t)\,dt$$

$$=\left[-\frac{2}{3}t^3+9t^2\right]_0^t=-\frac{2}{3}t^3+9t^2$$

Portanto, determinando a quantidade de água que fluiu em 3 minutos,

$$V=-\frac{2}{3}\times 3^3+9\times 3^2=63$$

Res. **63 *l***

(2) Encontre a quantidade total de água que fluiu do tanque de água.

[Res.] Primeiro encontramos o tempo, t em minutos, que levará para toda a água fluir.

De $v=-2t^2+18t=-2t(t-9)=0$,

$t=9$

Portanto, como toda água fluirá em 9 minutos,

$$V=-\frac{2}{3}\times 9^3+9\times 9^2=243$$

Res. **243 *l***

L 180a KUMON Velocidade e Distância

(25 pontos)

1. Uma pedra é arremessada perpendicularmente para cima e atinge a altura de 24,5 m com uma velocidade de 19,6 m/s. A altura alcançada após t segundos, é representada por $h = 24,5 + 19,6t - 4,9t^2$ (metros).

(1) Encontre a altura máxima que a pedra alcança.

[Res.] Seja v a velocidade da pedra em tempo t segundos.

De $v = \dfrac{dh}{dt} = 19,6 - 9,8t = 0$,

$t = 2$

Portanto, no tempo 2 segundos,

$h = 24,5 + 19,6 \times 2 - 4,9 \times 2^2 = 44,1$

Res. **44,1 m**

Solução Alternativa

$h = -4,9t^2 + 19,6t + 24,5$

$= -4,9(t-2)^2 + 44,1$

Quando $t = 2$, a altura h alcança o máximo, **44,1 m**.

(2) Encontre a velocidade instantânea da pedra quando ela atinge o solo.

[Res.] De $h = 24,5 + 19,6t - 4,9t^2 = 0$,

$t^2 - 4t - 5 = 0$

$(t-5)(t+1) = 0$ — Estamos procurando pela solução $t > 0$.

$t = 5$

Portanto, no tempo 5 segundos,

$v = 19,6 - 9,8 \times 5$

$= -29,4$

Res. **−29,4 m/s**

L 180b

2. Um ponto P se move em uma reta numérica. O ponto P parte da origem e sua velocidade após t segundos é $v = 3t^2 - 12t$ (cm/s).

(1) Encontre a distância percorrida pelo ponto P, 5 segundos após a partida.

[Res.] De $v = 3t^2 - 12t = 3t(t-4)$,

$$|v| = \begin{cases} -3t^2 + 12t & (0 \le t \le 4) \\ 3t^2 - 12t & (t \ge 4) \end{cases}$$

Portanto, sendo s a distância percorrida em 5 segundos,

$$s = \int_0^4 (-3t^2 + 12t)dt + \int_4^5 (3t^2 - 12t)dt$$

$$= \left[-t^3 + 6t^2\right]_0^4 + \left[t^3 - 6t^2\right]_4^5$$

$$= 39$$

Res. **39 cm**

(2) Encontre a velocidade com que o ponto P retorna à origem.

[Res.] Seja x a posição do ponto P após t segundos.

De $x = \int_0^t v dt = \int_0^t (3t^2 - 12t)dt = \left[t^3 - 6t^2\right]_0^t = t^3 - 6t^2 = 0$,

$t = 6$

Portanto, a velocidade após 6 segundos,

$v = 3 \times 6^2 - 12 \times 6 = 36$

Res. **36 cm/s**

L 181a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração I

(25 pontos)

1. As curvas $y = f(x) = (x+1)^3$ e $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ (onde $a \neq 0$), passam pelo mesmo ponto em $x = 0$, e tem uma tangente comum neste ponto. Também, $y = g(x)$ passa pelo ponto $(2,\ 3)$.

➡L55

(1) Encontre o ponto comum e a inclinação da tangente comum neste ponto.

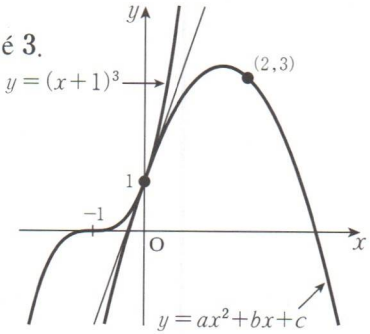
[Res.] De $f(0) = 1$, o ponto comum é **(0, 1)**.

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$

$f'(0) = 3$

Portanto, a inclinação da tangente é **3**.



(2) Usando a informação dada (que as curvas têm ponto em comum e tangente comum neste ponto), encontre a, b e c.

[Res.] $g'(x) = 2ax + b$

Portanto,

$$\begin{cases} g(0) = c = 1 & \cdots ① \\ g'(0) = b = 3 & \cdots ② \\ g(2) = 4a + 2b + c = 3 & \cdots ③ \end{cases}$$

De ①, ② e ③,

$\boldsymbol{a = -1,\ b = 3,\ c = 1}$

2. As curvas $y = x^3 - 2x + 1$ e $y = x^2 + 2ax + 1$ passam pelo mesmo ponto e tem uma tangente comum neste ponto.

(1) Encontre a ponto comum de tangência.

[Res.] Seja k a coordenada x do ponto comum de tangência.

Seja $f(x) = x^3 - 2x + 1$, e seja $g(x) = x^2 + 2ax + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 2$, $g'(x) = 2x + 2a$

No ponto comum $f(k) = g(k)$

Portanto, $k^3 - 2k + 1 = k^2 + 2ak + 1$ $\cdots$①

Como as inclinações das tangentes em comum neste ponto são iguais,

$f'(k) = g'(k)$

Portanto, $3k^2 - 2 = 2k + 2a$ $\cdots$②

De ②, $a = \frac{1}{2}(3k^2 - 2k - 2)$ $\cdots$③

Substituindo ③ em ①,

$k^3 - 2k + 1 = k^2 + 3k^3 - 2k^2 - 2k + 1$

$k^2(2k - 1) = 0$

$k = 0$, $\frac{1}{2}$

Portanto, o ponto de tangência é **(0, 1) ou** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$.

(2) Encontre o valor de a.

[Res.] De ③:

Se $k = 0$, $\boldsymbol{a = -1}$

Se $k = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{a = -\frac{9}{8}}$

L 182a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração I

(50 pontos)

1. Dado que a função $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ tem um valor extremo relativo em $x = -2$ e $x = 1$, e passa pelo ponto $(2,\ 11)$, encontre os valores a, b e c.

[Res.] $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$

De $f'(-2) = 24 - 4a + b = 0$, $\quad 4a - b = 24 \quad \cdots ①$

De $f'(1) = 6 + 2a + b = 0$, $\quad 2a + b = -6 \quad \cdots ②$

De $f(2) = 16 + 4a + 2b + c = 11$, $\quad 4a + 2b + c = -5 \quad \cdots ③$

De ① + ②, $6a = 18$

Portanto, $a = 3$

Substituindo em ②, $b = -12$

Substituindo em ③, $c = 7$

Portanto, $\boldsymbol{a = 3,\ b = -12,\ c = 7}$

Solução Altenativa

Como há valores extremos relativos $x = -2$ e $x = 1$,

Seja $f'(x) = m(x+2)(x-1) = m(x^2 + x - 2)$, (onde $m \neq 0$)

$$f(x) = \int m(x^2 + x - 2)dx$$

$$= m\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right) + \mathrm{C} \quad \cdots ①$$

De $f(2) = \left(\frac{8}{3} + 2 - 4\right)m + \mathrm{C} = 11$,

$$\frac{2}{3}m + \mathrm{C} = 11$$

Portanto, $\mathrm{C} = 11 - \frac{2}{3}m$

Substituindo em ①,

$$\frac{1}{3}mx^3 + \frac{1}{2}mx^2 - 2mx + \left(11 - \frac{2}{3}m\right) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$$

Comparando os coeficientes,

$$\frac{1}{3}m = 2,\ \frac{1}{2}m = a,\ -2m = b,\ 11 - \frac{2}{3}m = c$$

Portanto, $\boldsymbol{a = 3,\ b = -12,\ c = 7}$

2. A função $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tem valores extremos relativos em $x=0$ e $x=1$. Encontre os valores de a, b e c para que o produto dos valores extremos relativos de $f(x)$ seja mínimo.

➡L61, 62

[Res.] $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(0)=b=0 \quad \cdots①$

$f'(1)=3+2a+b=0 \quad \cdots②$

De ① e ②,

$$a=-\frac{3}{2},\ b=0$$

Portanto, $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+c$

Multiplicando os dois valores extremos relativos,

$$f(0)\cdot f(1)=c\left(c-\frac{1}{2}\right)$$

$$=c^2-\frac{1}{2}c$$

$$=\left(c-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$$

Portanto, quando $c=\frac{1}{4}$, o produto dos valores extremos relativos é mínimo.

Assim, $\boldsymbol{a=-\frac{3}{2},\ b=0,\ c=\frac{1}{4}}$

L 183a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração I

(33 pontos)

1. Dados $f(x) = x^3 - 3x + 1$ e $g(x) = x^3 + ax^2 + b$, encontre os valores de a e b de tal forma que as duas funções tenham os mesmos valores máximo relativo e mínimo relativo.

➡L76

[Res] $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	máximo relativo	↘	mínimo relativo	↗

Valor máximo relativo: $f(-1) = 3$

Valor mínimo relativo: $f(1) = -1$

$g'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$

(i) Quando $a > 0$,

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	máximo relativo	↘	mínimo relativo	↗

Valor máximo relativo: $g\left(-\frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{27}a^3 + b$

Valor mínimo relativo: $g(0) = b$

Portanto, de $\frac{4}{27}a^3 + b = 3$ e $b = -1$, $\quad a = 3,\ b = -1$

(ii) Quando $a < 0$,

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	máximo relativo	↘	mínimo relativo	↗

Valor máximo relativo: $g(0) = b$

Valor mínimo relativo: $g\left(-\frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{27}a^3 + b$

Portanto, de $b = 3$ e $\frac{4}{27}a^3 + b = -1$, $\quad a = -3,\ b = 3$

(iii) Quando $a = 0$, $\quad g'(x) = 3x^2 \geq 0$

Portanto, $y = g(x)$ não tem valores extremos relativos.

De (i), (ii) e (iii),

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = 3} \\ \boldsymbol{b = -1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = -3} \\ \boldsymbol{b = 3} \end{cases}$$

L183b

2. Dada a função $y = ax^2 - 4a^2x + 2a^2 + 8a + 5$ (onde $a \neq 0$):

(1) Expressse o valor mínimo relativo em função de a.

(2) Seja $g(a)$ o valor mínimo relativo encontrado em (1). Encontre o valor de a que maximiza $g(a)$.

➡K41, L81

[Res.] (1) Sendo $f(x) = ax^2 - 4a^2x + 2a^2 + 8a + 5$

Como $f(x)$ é uma função quadrática, seu gráfico tem um valor mínimo relativo quando $a > 0$.

De $f'(x) = 2ax - 4a^2 = 2a(x - 2a)$,

o valor mínimo relativo é:

$$\boldsymbol{f(2a)} = a\cdot(2a)^2 - 4a^2\cdot 2a + 2a^2 + 8a + 5$$
$$= \boldsymbol{-4a^3 + 2a^2 + 8a + 5}$$

Solução Alternativa

Completanto o quadrado,

$$ax^2 - 4a^2x + 2a^2 + 8a + 5$$
$$= a(x^2 - 4ax + 4a^2) - 4a^3 + 2a^2 + 8a + 5$$
$$= a(x - 2a)^2 - 4a^3 + 2a^2 + 8a + 5$$

Portanto, o valor mínimo relativo é $\boldsymbol{-4a^3 + 2a^2 + 8a + 5}$.

(2) Seja $g(a) = -4a^3 + 2a^2 + 8a + 5$

$$g'(a) = -12a^2 + 4a + 8 = -4(a - 1)(3a + 2)$$

a	0	⋯	1	⋯
$g'(a)$	╳	+	0	−
$g(a)$	╳	↗	máximo relativo	↘

Portanto, o valor de a que maximiza $g(a)$ é:

$\boldsymbol{a = 1}$

L184a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração I

(50 pontos)

1. Dada a função $f(x) = x^2(3a - x)$, encontre os valores máximo e mínimo no intervalo $-2 \le x \le 2$. Assuma $0 < a < 1$.

➡L81, 86

[Res.] $f(x) = x^2(3a - x)$

$f'(x) = -3x(x - 2a)$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$4(3a+2)$	↘	mínimo relativo	↗	máximo relativo	↘	$4(3a-2)$

$f(-2) = 4(3a+2)$, $\quad f(0) = 0$

$f(2a) = 4a^3$, $\quad f(2) = 4(3a-2)$

O valor máximo pode ser $f(-2)$ ou $f(2a)$. Comparando esses dois valores:

$$\begin{aligned} f(2a) - f(-2) &= 4a^3 - 4(3a+2) \\ &= 4a^3 - 12a - 8 \\ &= 4(a^3 - 3a - 2) \\ &= 4(a+1)^2(a-2) < 0 \quad \text{(assumindo } 0 < a < 1\text{)} \end{aligned}$$

Portanto, o valor máximo é $f(-2) = 4(3a+2)$.

O valor mínimo pode ser $f(0)$ ou $f(2)$.

Comparando estes dois valores:

(i) Quando $\frac{2}{3} \le a < 1$, $f(2) \ge 0$

Como $f(2) \ge f(0)$, o valor mínimo é $f(0) = 0$.

(ii) Quando $0 < a < \frac{2}{3}$, $f(2) < 0$

Como $f(0) > f(2)$, o valor mínimo é $f(2) = 4(3a-2)$.

Res: **Valor máximo: $f(-2) = 4(3a+2)$**

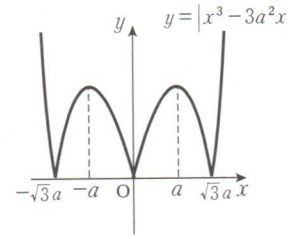
$$\textbf{Valor mínimo:} \begin{cases} f(2) = 4(3a-2) & \left(\text{quando } 0 < a < \frac{2}{3}\right) \\ f(0) = 0 & \left(\text{quando } \frac{2}{3} \le a < 1\right) \end{cases}$$

2. Encontre o valor máximo da função $y = |\, x^3 - 3a^2x \,|$ (onde $a > 0$), no intervalo $0 \le x \le 1$.

➡L84

[Res.] Seja $f(x) = x^3 - 3a^2x$

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$



Seja $f(x) = 0$ para encontrar x:

De $x^3 - 3a^2x = x(x+\sqrt{3}a)(x-\sqrt{3}a) = 0$,

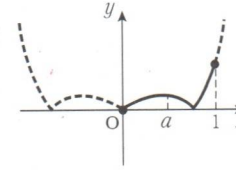
$x = 0,\ -\sqrt{3}a,\ \sqrt{3}a$

Portanto,

$$|f(x)| = \begin{cases} x^3 - 3a^2x & (\text{quando } x \ge \sqrt{3}a) \\ -x^3 + 3a^2x & (\text{quando } 0 \le x < \sqrt{3}a) \end{cases}$$

$$|f(a)| = |a^3 - 3a^3| = |-2a^3| = 2a^3$$

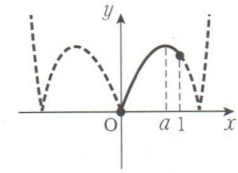
(i)



$$|f(1)| = \begin{cases} 1 - 3a^2 & (\text{quando } 0 < a \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}) \\ 3a^2 - 1 & (\text{quando } a > \dfrac{1}{\sqrt{3}}) \end{cases}$$

O máximo pode ser $x = a$ ou $x = 1$.

(ii)



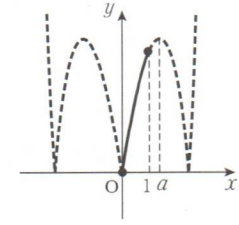
Encontre o valor a para que $|f(a)| = |f(1)|$:

Quando $0 < a \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$2a^3 = 1 - 3a^2$

$(a+1)^2(2a-1) = 0$, então $a = \dfrac{1}{2}$

(iii)



Quando $a > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$2a^3 = 3a^2 - 1$

$(a-1)^2(2a+1) = 0$, então $a = 1$

Portanto:

(i) **Quando $0 < a < \dfrac{1}{2}$,** o valor máximo é $1 - 3a^2$, **em $x = 1$.**

(ii) **Quando $\dfrac{1}{2} \le a \le 1$** , o valor máximo é $2a^3$, **em $x = a$.**

(iii) **Quando $a > 1$,** o valor máximo é $3a^2 - 1$, **em $x = 1$.**

L185a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração I

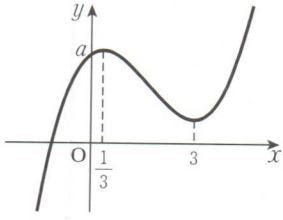
(50 pontos)

1. Dada a função $f(x)=x^3-5x^2+3x+a$, encontre as condições para que $f(x)>0$ seja sempre verdadeiro para qualquer valor positivo de x. ➡L109

[Res.] $f'(x)=3x^2-10x+3$

$=(3x-1)(x-3)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+
$f(x)$	a	↗	máximo relativo	↘	mínimo relativo	↗



Da tabela, podemos ver que $f(x)>0$ para todo $x>0$ de acordo com as seguintes condições:

$$\begin{cases} f(0)=a\geq 0 & \cdots① \\ f(3)=a-9>0 & \cdots② \end{cases}$$

De ① e ②,

$\boldsymbol{a>9}$

2. Encontre o intervalo de valores de a para que a equação $x^3-3a^2x+2=0$ tenha 3 raízes reais diferentes.

➡L105, 106

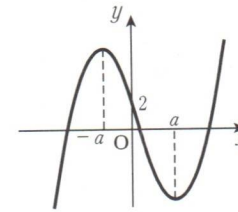
[Res.]

Seja $f(x)=x^3-3a^2x+2$

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

(i) Quando $a=0$,

$x^3+2=0$ não tem 3 raízes reais diferentes.



(ii) Quando $a>0$,

$f(x)$ tem um mínimo relativo em $x=a$, e um máximo relativo em $x=-a$.

Como $f(0)=2>0$, há 3 raízes diferentes apenas se $f(a)=-2a^3+2<0$.

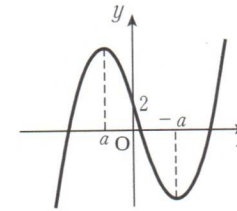
Portanto, $2a^3>2$, ou seja $a>1$.

(iii) Quando $a<0$,

$f(x)$ tem um mínimo relativo em $x=-a$, e um máximo relativo em $x=a$.

Como $f(0)=2>0$, há 3 raízes diferentes apenas se $f(-a)=2a^3+2<0$.

Portanto, $2a^3<-2$, ou seja $a<-1$.



De (i), (ii) e (iii), $\boldsymbol{a<-1,\ a>1}$.

Solução Alternativa

Para os dois casos ($a>0$ ou $a<0$), há 3 raízes reais deiferentes quando $f(a)\cdot f(-a)<0$.

Portanto,

$(-2a^3+2)(2a^3+2)=-4(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)<0$

$(a-1)(a+1)>0$

Portanto, $\boldsymbol{a<-1,\ a>1}$.

L186a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração I

(33 pontos)

1. A função $f(x) = a(x-2)(x-3)(x-b)$, onde $f(2) = f(3) = 0$, tem um valor máximo relativo de 4 em $x = 1$.

(1) Encontre b.

(2) Encontre o valor de x onde a função tem valor mínimo relativo.

[Res.] $f(x) = a[x^3 - (5+b)x^2 + (6+5b)x - 6b]$

$f'(x) = a[3x^2 - 2(5+b)x + (6+5b)]$ $\cdots$①

(1) De $f'(1) = 0$,

substituindo $x = 1$ em ①,

$3 - 2(5+b) + (6+5b) = 3b - 1 = 0$

Portanto, $\boldsymbol{b = \frac{1}{3}}$

(2) De $f(1) = 4$,

substituindo $b = \frac{1}{3}$ e $x = 1$ em $f(x)$,

$$a(1-2)(1-3)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}a = 4$$

Portanto, $a = 3$

Substituindo $a = 3$ e $b = \frac{1}{3}$ em ①,

$$f'(x) = 3\left(3x^2 - \frac{32}{3}x + \frac{23}{3}\right)$$

$$= 9x^2 - 32x + 23 = (x-1)(9x-23)$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{23}{9}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	máximo relativo	↘	mínimo relativo	↗

Assim, $f(x)$ tem um valor mínimo relativo em $\boldsymbol{x = \frac{23}{9}}$.

L186b

2. Encontre a função cúbica $f(x)$ que satisfaça as seguintes condições:

(i) Quando esta é dividida por $(x-2)^2$, o resto é $2x+1$.

(ii) Esta tem um valor extremo relativo de 2, em $x=1$.

[Res.] Da condição (i), seja o quociente $ax+b$.

Primeiro expandir $(x-2)^2$, antes de diferenciar. Use a fórmula do L49b.

$$f(x)=(x-2)^2(ax+b)+2x+1$$

$$f'(x)=(2x-4)(ax+b)+a(x-2)^2+2$$

$$=2ax^2+(2b-4a)x-4b+ax^2-4ax+4a+2$$

$$=3ax^2+(2b-8a)x+4a-4b+2$$

Usando a condição (ii),

$$f'(1)=3a+2b-8a+4a-4b+2$$

$$=-a-2b+2=0 \qquad \cdots①$$

$$f(1)=a+b+3=2 \qquad \cdots②$$

De ① e ②, $a=-4$, $b=3$

Portanto,

$$\boldsymbol{f(x)}=(x-2)^2(-4x+3)+2x+1$$

$$=(x^2-4x+4)(-4x+3)+2x+1$$

$$\boldsymbol{=-4x^3+19x^2-26x+13}$$

Método alternativo de diferenciação.

Expandir primeiro antes de diferenciar.

$$f(x)=(x-2)^2(ax+b)+2x+1$$

$$=(x^2-4x+4)(ax+b)+2x+1$$

$$=ax^3+(b-4a)x^2+(4a-4b+2)x+(4b+1)$$

$$f'(x)=3ax^2+2(b-4a)x+(4a+4b+2)$$

L187a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração I

(50 pontos)

1. Dado que a reta $y=ax+b$ passa pelo ponto $(1,\ 2)$, encontre os valores de a e b que resultam no valor mínimo da integral definida $\int_{-1}^{1}(ax+b)^2dx$.

➡L138

[Res.] Como a reta $y=ax+b$ passa pelo ponto $(1,\ 2)$,

de $2=a+b$, $\quad b=2-a$ $\cdots$①

$$\int_{-1}^{1}(ax+b)^2dx=\int_{-1}^{1}(a^2x^2+2abx+b^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(a^2x^2+b^2)dx$$

$$=2\left[\frac{a^2}{3}x^3+b^2x\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{a^2}{3}+b^2\right) \quad \cdots②$$

Substituindo ① em ②,

$$2\left(\frac{a^2}{3}+b^2\right)=2\left[\frac{a^2}{3}+(2-a)^2\right]$$

$$=\frac{8}{3}(a^2-3a+3)$$

$$=\frac{8}{3}\left[\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$$

Portanto, quando $a=\frac{3}{2}$, a integral definida tem um valor mínimo.

Neste o valor, de ①, $b=2-a=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

Assim, $\boldsymbol{a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}}$

2. Encontre o valor de c que satisfaça a equação integral $\int_0^c |x^2-1|dx = c$. Assuma $c>0$.

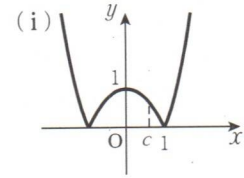
➡L I 27

[Res.] (i) Quando $0<c<1$,

$$\int_0^c |x^2-1|dx = \int_0^c (-x^2+1)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^c$$

$$= -\frac{c^3}{3}+c = c$$



Assim, $-\frac{c^3}{3}=0$, então $c=0$.

Como $0<c<1$, $c=0$ não satisfaz esta condição.

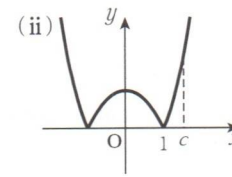
(ii) Quando $c \geq 1$,

$$\int_0^c |x^2-1|dx = \int_0^1 (-x^2+1)dx + \int_1^c (x^2-1)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^c$$

$$= \frac{2}{3}+\frac{c^3}{3}-c-\frac{1}{3}+1$$

$$= \frac{c^3}{3}-c+\frac{4}{3} = c$$



Assim, $\frac{c^3}{3}-2c+\frac{4}{3}=0$,

$c^3-6c+4=0$

$(c-2)(c^2+2c-2)=0$

$c=2,\ -1\pm\sqrt{3}$

Como $c \geq 1$, $c=2$

De (i) e (ii), $\boldsymbol{c=2}$

(25 pontos)

1. Determine as funções $f(x)$ e $g(x)$ (ambas em função de x) que satisfaça as seguintes relações de integral.

$$f(x)=1+\int_0^x g(t)dt\text{, e }g(x)=x(x-1)+\int_{-1}^1 f(t)dt$$

➡L131, 136

[Res.] Seja $c=\int_{-1}^1 f(t)dt$ …①

$g(x)=x(x-1)+c$

Esta integral está entre os limites fixos $[-1,\ 1]$ e dará como resultado uma constante, ou seja, ela não está em função de x.

Portanto,

$$f(x)=1+\int_0^x [t(t-1)+c]dt$$

$$=1+\int_0^x (t^2-t+c)dt$$

$$=1+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+ct\right]_0^x$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+cx+1 \quad \cdots②$$

Substituindo ② em ①,

$$c=\int_{-1}^1 f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+ct+1\right)dt$$

$$=2\int_0^1\left(-\frac{1}{2}t^2+1\right)dt$$

$$=2\left[-\frac{1}{6}t^3+t\right]_0^1=\frac{5}{3}$$

Assim, $c=\frac{5}{3}$

Portanto,

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{3}x+1}$$

$$\boldsymbol{g(x)=x^2-x+\frac{5}{3}}$$

2. Dada a função cúbica $f(x)=x^3-3x+\frac{8}{3}\int_0^1 f(x)dx$, complete os seguintes exercícios.

➡L136, 63

(1) Encontre a derivada, $f'(x)$.

[Res.] Seja $a=\int_0^1 f(x)dx$ …①

Então $f(x)=x^3-3x+\frac{8}{3}a$ …②

Fazendo a derivada de ②,

$\boldsymbol{f'(x)=3x^2-3}$

(2) Determine a função $f(x)$.

[Res.] Substituindo ② em ①,

$$a=\int_0^1\left(x^3-3x+\frac{8}{3}a\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{8}{3}ax\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{8}{3}a$$

Portanto, $a=\frac{3}{4}$

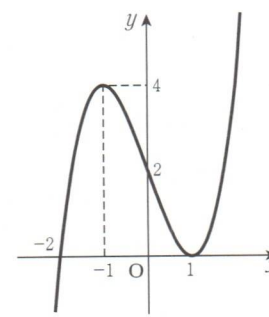
Assim, $\boldsymbol{f(x)=x^3-3x+2}$

(3) Esboce a função $y=f(x)$.

[Res.] $f(x)=x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗



L189a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração I

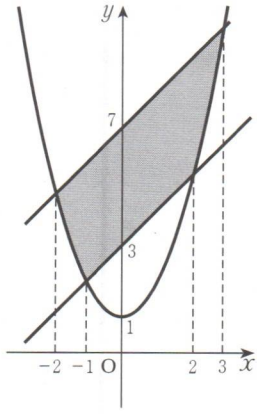
(50 pontos)

1. Encontre a área, S, limitada por $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$ e $y = x + 7$.

➡L148

[Res.] Seja S_1 a área limitada por $y = x^2 + 1$ e $y = x + 7$. Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção de $y = x^2 + 1$ e $y = x + 7$,

$$x^2 + 1 = x + 7$$
$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$$
$$x = -2,\ 3$$



Portanto,

$$S_1 = \int_{-2}^{3} [(x + 7) - (x^2 + 1)]dx$$
$$= -\int_{-2}^{3} (x^2 - x - 6)dx$$
$$= -\int_{-2}^{3} (x + 2)(x - 3)dx$$
$$= \frac{1}{6}(3 + 2)^3 = \frac{125}{6}$$

Seja S_2 a área limitada por $y = x^2 + 1$ e $y = x + 3$. Encontrando as coordenadas x dos pontos de intersecção de $y = x^2 + 1$ e $y = x + 3$,

$$x^2 + 1 = x + 3$$
$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) = 0$$
$$x = -1,\ 2$$

Portanto,

$$S_2 = \int_{-1}^{2} [(x + 3) - (x^2 + 1)]dx$$
$$= -\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx$$
$$= -\int_{-1}^{2} (x + 1)(x - 2)dx$$
$$= \frac{1}{6}(2 + 1)^3 = \frac{9}{2}$$

Portanto, a área, S, limitada pela curva e as retas é:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{125}{6} - \frac{9}{2} = \mathbf{\frac{49}{3}}$$

2. Encontre os valores de a e b que resultam no valor mínimo da área, S, da região limitada pela curva $y=-x^2+ax+b$ (que passa pelo ponto $(1,\ 2)$) e a curva $y=\frac{1}{2}x^2$.

➡L159

[Res.] Como $y=-x^2+ax+b$ passa pelo ponto $(1,\ 2)$,

de $2=-1+a+b$,

$b=3-a$ $\cdots$①

Encontrando as coordendas de x dos pontos de intersecção entre $y=-x^2+ax+b$ e $y=\frac{1}{2}x^2$:

De $-x^2+ax+b=\frac{1}{2}x^2$,

$x^2-\frac{2}{3}ax-\frac{2}{3}b=0$

Sejam α e β as soluções de $x^2-\frac{2}{3}ax-\frac{2}{3}b=0$ (onde $\alpha<\beta$),

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}a,\quad \alpha\beta=-\frac{2}{3}b$

Portanto,

$$S=\int_\alpha^\beta\left[(-x^2+ax+b)-\frac{1}{2}x^2\right]dx$$

$$=-\frac{3}{2}\int_\alpha^\beta\left(x^2-\frac{2}{3}ax-\frac{2}{3}b\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3$$

Use a fórmula do L124b.

$$=\frac{1}{4}\left[\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\right]^3$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{4}{9}a^2+\frac{8}{3}b}\right)^3$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{4}{9}a^2+\frac{8}{3}(3-a)}\right]^3$$

Substituir ①.

$$=\frac{2}{27}\left[\sqrt{(a-3)^2+9}\right]^3$$

Portanto, quando $a=3$, a área, S, terá um valor mínimo.

Naquele valor, de ①, $b=0$.

Portanto a área, S, terá um valor mínimo quando $\boldsymbol{a=3}$ e $\boldsymbol{b=0}$.

L 190a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração I

(25 pontos)

1. Dado que a curva $y = -x^3 + 2x^2$ tem uma tangente (num outro ponto além da origem) que passa pela origem, complete os seguintes exercícios.

(1) Encontre a equação da tangente.

(2) Encontre a área da região limitada pela tangente e a curva.

[Res.] (1) Seja a (onde $a \neq 0$) a coordenada x do ponto de tangência.

$y' = -3x^2 + 4x$

Quando $x = a$, a inclinação da tangente é $-3a^2 + 4a$.

Como a tangente passa pela origem, a equação da tangente é

$y = (-3a^2 + 4a)x \quad \cdots ①$

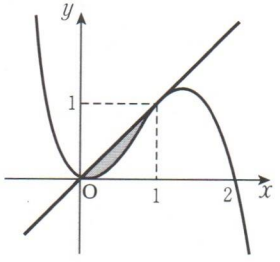
O ponto de tangência é $(a, -a^3 + 2a^2)$,

então $-a^3 + 2a^2 = (-3a^2 + 4a)a$

$2a^3 - 2a^2 = 2a^2(a-1) = 0$

Como $a \neq 0$, $a = 1$

De ①, a equação da tangente é $\boldsymbol{y = x}$.



Solução alternativa

Como a tangente passa pela origem, seja a equação da tangente $y = mx$.

$-x^3 + 2x^2 = mx$

$-x^3 + 2x^2 - mx = -x(x^2 - 2x + m) = 0$

$x = 0$ corresponde à tangente passando pela origem. A outra solução corresponde para um ponto de tangência, então $x^2 - 2x + m = 0$ precisa ter uma solução múltipla.

De $\dfrac{D}{4} = 1 - m = 0$ para $m = 1$.

Assim, a equação da tangente é $\boldsymbol{y = x}$.

(2) Integrando entre $x = 0$ e $x = 1$,

$$\int_0^1 [x - (-x^3 + 2x^2)]dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Portanto, a área da região limitada é $\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$.

2. A curva $y = x(x-a)^2$ (onde $a > 1$) tem uma tangente, l, na origem,O. A reta l também intercepta a curva em outro ponto, P, além de O. A perpendicular de P ao eixo x encontra o eixo x em Q. Seja S_1 a área do triângulo ΔOPQ, e seja S_2 a região limitada pela curva $y = x(x-a)^2$ e a tangente l.

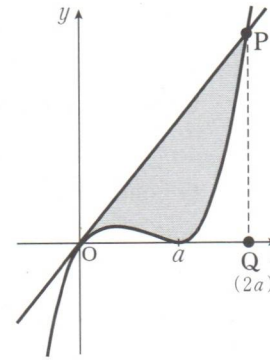
(1) Encontre S_1 e S_2 em função de a.

[Res.] Seja $f(x) = x(x-a)^2 = x^3 - 2ax^2 + a^2x$

$f'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2$

Como $f'(0) = a^2$, a tangente l é:

$y = a^2x$



Encontrando as coordendas de P,

de $x^3 - 2ax^2 + a^2x = a^2x$,

$x^2(x-2a) = 0$

$x = 0,\ 2a$

Portanto,

$P(2a,\ 2a^3),\ Q(2a,\ 0)$

Portanto,

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot OQ\cdot PQ = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a^3 = \mathbf{2a^4}$$

$$S_2 = \int_0^{2a}[a^2x - (x^3 - 2ax^2 + a^2x)]dx$$

$$= \int_0^{2a}(-x^3 + 2ax^2)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}ax^3\right]_0^{2a}$$

$$= \mathbf{\frac{4}{3}a^4}$$

(2) Encontre a razão das áreas $S_1 : S_2$.

[Res.] $S_1 : S_2 = 2a^4 : \frac{4}{3}a^4 = \mathbf{3 : 2}$

L 191a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração II

(33 pontos)

1. Dada a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$:

(1) Encontre a equação da reta que é tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a,\ f(a))$.

(2) Encontre o intervalo de valores de p, para que a curva tenha 3 tangentes diferentes passando pelo ponto $(0,\ p)$.

➡L58

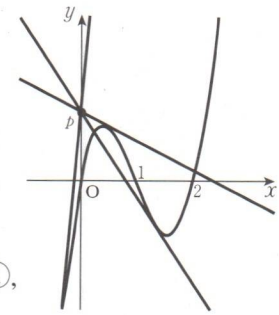
[Res.] (1) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f'(a) = 3a^2 - 6a + 2$

A equação da tangente é:

$\boldsymbol{y} = (3a^2 - 6a + 2)(x - a) + a^3 - 3a^2 + 2a$

$\boldsymbol{= (3a^2 - 6a + 2)x - 2a^3 + 3a^2}$ …①



(2) Substituindo as coordenadas $(0,\ p)$ em ①,

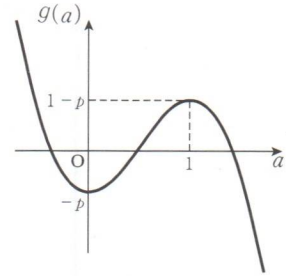
$-2a^3 + 3a^2 = p$

Como 3 retas tangentes passam neste ponto, então a equação $-2a^3 + 3a^2 - p = 0$ precisa ter 3 raízes para a.

Seja $g(a) = -2a^3 + 3a^2 - p$

$g'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a - 1)$

a	…	0	…	1	…
$g'(a)$	−	0	+	0	−
$g(a)$	↘	mínimo relativo	↗	máximo relativo	↘



$g(a) = 0$ tem 3 raízes,

Quando o valor mínimo relativo < 0

e o valor máximo relativo > 0

De $g(0) = -p < 0$ e $g(1) = 1 - p > 0$,

$\boldsymbol{0 < p < 1}$

2. Encontre o intervalo de valores de k para que $x^3-3x^2 \geq k(3x^2-12x-4)$ seja verdadeiro para todos os valores de $x \geq 0$. Assuma $k>0$.

➡L77, 109

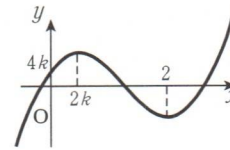
[Res.] Seja $f(x)=x^3-3x^2-k(3x^2-12x-4)$

$f(x)=x^3-3(1+k)x^2+12kx+4k$

Agora $f(0)=4k>0$ como $k>0$.

Também $f'(x)=3x^2-6(1+k)x+12k$

$=3(x-2)(x-2k)$



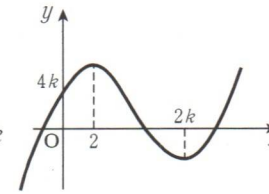
(i) Quando $0<2k<2$, ou seja, quando $0<k<1$,
há um mínimo relativo em $x=2$.
De $f(2)=8-3(1+k)\cdot 4+24k+4k=16k-4$,

Como queremos $f(2) \geq 0$, então $16k-4 \geq 0$, ou seja, $k \geq \frac{1}{4}$

Portanto, $\frac{1}{4} \leq k<1$

(ii) Quando $2k=2$, ou seja, quando $k=1$,
$f'(x)=3(x-2)^2 \geq 0$, então $f(x)$ não tem valor extremo relativo e é sempre crescente. Como $f(0)=4$, $f(x)>0$ para todo $x \geq 0$.

(iii) Quando $2k>2$, ou seja, quando $k>1$,
há um mínimo relativo em $x=2k$.



De $f(2k)=8k^3-3(1+k)\cdot 4k^2+24k^2+4k$

$=-4k(k^2-3k-1)$

$=-4k\left[k-\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\right]\left[k-\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\right]$,

Como queremos $f(2k) \geq 0$ e $k>1$, então

$1<k \leq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

De (i), (ii) e (iii), $\boldsymbol{\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3+\sqrt{13}}{2}}$

L192a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração II

(50 pontos)

1. Encontre o intervalo de valores de h de forma que a função $f(x)=x+h$ satisfaça a inequação integral: $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \leq \int_0^1 xf(x)dx$.

[Res.] $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+h)^2 dx = \int_0^1 (x^2+2hx+h^2)dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + hx^2 + h^2 x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + h + h^2$$

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x(x+h)dx = \int_0^1 (x^2+hx)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{h}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{h}{2}$$

De $\frac{1}{3} + h + h^2 \leq \frac{1}{3} + \frac{h}{2}$,

$$h^2 + \frac{h}{2} \leq 0$$

$$h\left(h + \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

Portanto, $\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leq h \leq 0}$

2. Suponha que $f(x)$ é uma função quadrárica em x e $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = 2$.

Encontre a função $f(x)$ que resulte num valor mínimo de $\int_{-1}^{1} [f(x)]^2 dx$.

➡L138

[Res.] Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ (onde $a \neq 0$)

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2(ax^2+bx+c)dx = \int_{-1}^{1} (ax^4+bx^3+cx^2)dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} (ax^4+cx^2)dx = 2\left[\frac{a}{5}x^5 + \frac{c}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{a}{5} + \frac{c}{3}\right) = 2$$

Portanto, $c = 3 - \frac{3}{5}a$ ···①

$$\int_{-1}^{1} [f(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} [a^2x^4 + 2abx^3 + (2ca+b^2)x^2 + 2bcx + c^2]dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} [a^2x^4 + (2ca+b^2)x^2 + c^2]dx$$

$$= 2\left[\frac{a^2}{5}x^5 + \frac{2ca+b^2}{3}x^3 + c^2x\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{a^2}{5} + \frac{2ca+b^2}{3} + c^2\right) \quad \cdots②$$

Substituindo ① em ②,

$$2\left[\frac{a^2}{5} + \frac{2}{3}a\left(3 - \frac{3}{5}a\right) + \frac{b^2}{3} + \left(3 - \frac{3}{5}a\right)^2\right]$$

$$= 2\left(\frac{4}{25}a^2 - \frac{8}{5}a + \frac{b^2}{3} + 9\right)$$

$$= \frac{8}{25}(a-5)^2 + \frac{2}{3}b^2 + 10$$

Portanto, quando $a = 5$ e $b = 0$ esta integral terá um valor mínimo.
Para este o valor, de ①, $c = 3 - \frac{3}{5}a = 0$

Assim, $\boldsymbol{f(x) = 5x^2}$

L 193a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração II

(33 pontos)

1. Determine as funções $f(x)$ e $g(x)$ (ambas funções de x, com 1 no coeficiente do termo de maior expoente) que satisfaça as seguintes condições.

➡L 138

(1) $f(x)$ é uma função linear, e para qualquer constante c, $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot c\,dx = 0$.

[Res.] Seja $f(x) = x + k$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot c\,dx = c\int_{-1}^{1}(x+k)dx = 2c\int_{0}^{1} k\,dx = 2c\Big[kx\Big]_{0}^{1} = 2ck = 0$$

Para que a equação acima seja verdadeira para qualquer valor de c, k precisa ser igual a zero.

Portanto, $k = 0$

Assim, $\boldsymbol{f(x) = x}$

(2) $g(x)$ é uma função quadrática, e para qualquer função linear $h(x)$,

$$\int_{-1}^{1} g(x)\cdot h(x)dx = 0.$$

[Res.] Seja $g(x) = x^2 + mx + n$, e seja $h(x) = sx + t$

$$\int_{-1}^{1} g(x)\cdot h(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^2+mx+n)(sx+t)dx$$

$$= s\int_{-1}^{1}(x^3+mx^2+nx)dx + t\int_{-1}^{1}(x^2+mx+n)dx$$

$$= 2s\int_{0}^{1} mx^2dx + 2t\int_{0}^{1}(x^2+n)dx = 2s\Big[\frac{m}{3}x^3\Big]_{0}^{1} + 2t\Big[\frac{1}{3}x^3+nx\Big]_{0}^{1}$$

$$= \frac{2m}{3}s + 2\Big(\frac{1}{3}+n\Big)t = 0$$

Para que a equação acima seja verdadeira para qualquer valor de s e t, as duas equações seguintes precisam ser verdadeiras:

$$\frac{2m}{3} = 0, \quad 2\Big(\frac{1}{3}+n\Big) = 0$$

Portanto, $m = 0$, $n = -\frac{1}{3}$

Assim, $\boldsymbol{g(x) = x^2 - \frac{1}{3}}$

$h(x) = sx$

2. Uma função cúbica $f(x)$ passa pela origem, e a inclinação da tangente na origem é 1. Determine esta função $f(x)$, para que $\int_0^1 f(x).\ g(x)dx = 0$, seja sempre verdadeira para qualquer função linear $g(x)$.

➡L55, 138

[Res.] Como a função cúbica passa pela origem,

sendo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

De $f'(0) = c$, $c = 1$

Seja $g(x) = px + q$

$$\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + x)(px + q)dx$$

$$= p\int_0^1 (ax^4 + bx^3 + x^2)dx + q\int_0^1 (ax^3 + bx^2 + x)dx$$

$$= p\left[\frac{a}{5}x^5 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + q\left[\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{1}{3}\right)p + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{1}{2}\right)q = 0$$

Para que a equação acima seja verdadeira para qualquer valor de p e q, as duas equações seguintes precisam ser verdadeiras:

$\frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{1}{3} = 0$ assim, $12a + 15b = -20$ …①

$\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{1}{2} = 0$ assim, $3a + 4b = -6$ …②

De ① e ②,

$a = \frac{10}{3}$, $b = -4$

Portanto, $\boldsymbol{f(x) = \frac{10}{3}x^3 - 4x^2 + x}$

L 194a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração II

(25 pontos)

1. Dado que as curvas $y = x^2 + 2x + 1$ e $y = -3x^2 + ax + b$ se tocam no ponto $(1, 4)$:

➡L 181

(1) Encontre os valores de a e b.

[Res.] Seja $f(x) = x^2 + 2x + 1$, e seja $g(x) = -3x^2 + ax + b$

De $f'(x) = 2x + 2$, $f'(1) = 4$

De $g'(x) = -6x + a$, $g'(1) = -6 + a$

Sendo $f'(1) = g'(1)$,

$4 = -6 + a$

$a = 10$

Como $g(1) = -3 + 10 + b = 4$, então $b = -3$

Portanto, $\boldsymbol{a = 10,\ b = -3}$

(2) Encontre a área, S, limitada pelas duas curvas e o eixo y.

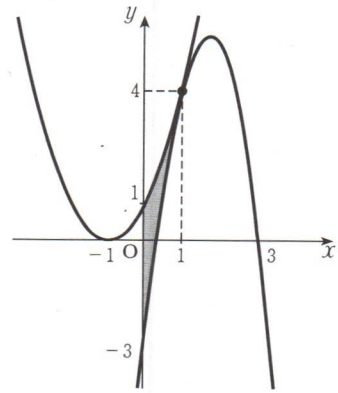
[Res.] $S = \int_0^1 [(x^2 + 2x + 1) - (-3x^2 + 10x - 3)]dx$

$= \int_0^1 (4x^2 - 8x + 4)dx$

$= 4\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^1$

$= 4\left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right)$

$= \boldsymbol{\frac{4}{3}}$



L194b

2. Dado que as curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 - a$ (onde $a > 0$) passam pelo ponto, P, e têm uma tangente comum no ponto P.

(1) Encontre o valor de a.

(2) Encontre a área, S, limitada pelas duas curvas.

[Res.] (1) Seja $f(x) = x^3 - x$, e seja $g(x) = x^2 - a$

$f'(x) = 3x^2 - 1, \quad g'(x) = 2x$

Seja p a coordenada x do ponto P.

$f'(p) = 3p^2 - 1, \quad g'(p) = 2p$

Sendo $f'(p) = g'(p), \quad 3p^2 - 1 = 2p$

$3p^2 - 2p - 1 = (3p+1)(p-1) = 0, \quad p = -\frac{1}{3}, \ 1$

Quando $p = -\frac{1}{3}$,

de $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} + \frac{1}{3} = \frac{8}{27}$, e $g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - a$,

sendo $f\left(-\frac{1}{3}\right) = g\left(-\frac{1}{3}\right), \quad \frac{1}{9} - a = \frac{8}{27}$

Portanto, $a = -\frac{5}{27}$

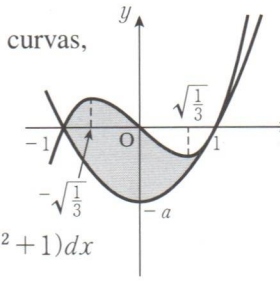
Quando $p = 1$, de $f(1) = 1 - 1 = 0$, e $g(1) = 1 - a$,
sendo $f(1) = g(1), \quad 1 - a = 0$
Portanto, $a = 1$

Como $a > 0$, $a = -\frac{5}{27}$ é uma solução inadequada.

Portanto, $\boldsymbol{a = 1}$

(2) Encontrando os pontos comuns das duas curvas,

$x^3 - x = x^2 - 1$
$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
$(x-1)^2(x+1) = 0$
$x = -1, \ 1$



$$\boldsymbol{S} = \int_{-1}^{1} [x^3 - x - (x^2 - 1)]dx = 2\int_{0}^{1} (-x^2 + 1)dx$$

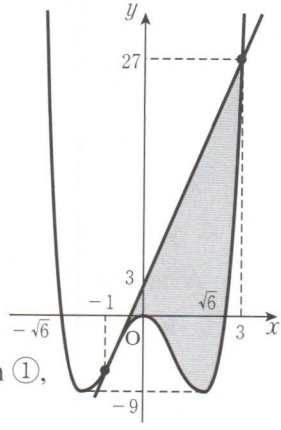
$$= 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = 2\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

L 195a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração II

(20 pontos)

1. Dada a curva $y = x^4 - 6x^2$:

(1) Entre as tangentes que passam pelo ponto $(0,\ 3)$, encontre aquela que tem inclinação positiva.



[Res.] Seja $f(x) = x^4 - 6x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$

Seja a a coordenada x do ponto de tangência.

$f'(a) = 4a^3 - 12a$

Portanto, a equação da tangente é:

$y = (4a^3 - 12a)(x - a) + a^4 - 6a^2$

$= (4a^3 - 12a)x - 3a^4 + 6a^2 \quad \cdots ①$

Substituindo as coordenadas do ponto $(0,\ 3)$ em ①,

$3 = -3a^4 + 6a^2$

$3(a^4 - 2a^2 + 1) = 3(a^2 - 1)^2 = 0$

$(a^2 - 1)^2 = (a+1)^2(a-1)^2 = 0$ Portanto, $a = \pm 1$

Quando $a = -1$, $f'(-1) = 8$

Quando $a = 1$, $f'(1) = -8 < 0$

Esta é uma solução inadequada. Estamos procurando uma inclinação positiva.

Portanto, $\boldsymbol{y = 8x + 3}$

(2) Encontre a área, S, limitada pela curva e a tangente.

[Res.] De $x^4 - 6x^2 = 8x + 3$,

$x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1)^3 = 0$

$x = -1,\ 3$

$$\boldsymbol{S} = \int_{-1}^{3} [8x + 3 - (x^4 - 6x^2)]\,dx$$

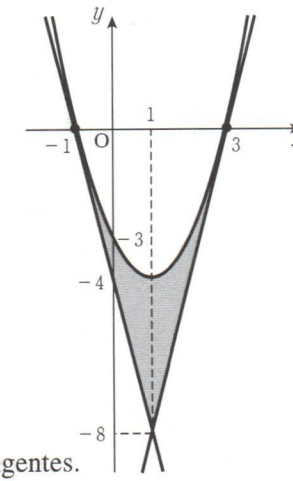
$$= \left[-\frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 4x^2 + 3x \right]_{-1}^{3}$$

$$= \left(-\frac{243}{5} + 54 + 36 + 9 \right) - \left(\frac{1}{5} - 2 + 4 - 3 \right) = \boldsymbol{\frac{256}{5}}$$

2. Dada a parábola $y = x^2 - 2x - 3$:

(1) Encontre as equações das duas retas que são tangentes à parábola no eixo x.

➡L154



[Res.] De $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0$,

$x = -1,\ 3$

A reta cruza o eixo x nos pontos $(-1,\ 0)$ e $(3,\ 0)$.

De $y' = 2x - 2$:

A tangente em $(-1,\ 0)$ é:

$\boldsymbol{y = -4(x+1) = -4x-4}$

A tangente em $(3,\ 0)$ é:

$\boldsymbol{y = 4(x-3) = 4x-12}$

(2) Encontre o ponto de intersecção das duas tangentes.

[Res.] De $-4x - 4 = 4x - 12$,

$8x - 8 = 0$

Portanto, $x = 1$, $y = -8$

O ponto de intersecção é **(1, −8)**.

(3) Encontre a área, S, limitada pela parábola e as duas retas tangentes de (1) acima.

[Res.] $$\boldsymbol{S} = \int_{-1}^{1}[(x^2-2x-3)-(-4x-4)]dx + \int_{1}^{3}[(x^2-2x-3)-(4x-12)]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx + \int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}+1\right)+(9-27+27)-\left(\frac{1}{3}-3+9\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{16}{3}}$$

L 196a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração II

(33 pontos)

1. Quando a curva $C_1 : y = x^3 - x$ é deslocada a unidades ao longo do eixo x $(a > 0)$, resulta na curva $C_2 : y = (x-a)^3 - (x-a)$.

(1) Encontre o intervalo de valores de a para que as curvas C_1 e C_2 tenham no mínimo um ponto em comum.

[Res.] $(x-a)^3 - (x-a) = x^3 - 3ax^2 + (3a^2-1)x - a^3 + a$

Como as curvas C_1 e C_2 têm um ponto em comum, naquele ponto,

$x^3 - x = x^3 - 3ax^2 + (3a^2-1)x - a^3 + a$

Resolvendo esta equação,

$3ax^2 - 3a^2x + a^3 - a = 0$

Como $a \neq 0$, $3x^2 - 3ax + a^2 - 1 = 0$ $\cdots$①

Calculando o discriminante de ①,

$D = 9a^2 - 4 \cdot 3(a^2-1) \geq 0$

$3a^2 - 12 \leq 0$

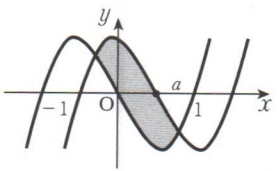
$3(a+2)(a-2) \leq 0$

Como $a > 0$, $\mathbf{0 < a \leq 2}$

(2) Utilizando o resultado de (1), expresse a área, S, limitada pelas duas curvas C_1 e C_2, em termos de a.

[Res.] De $(x-a)^3 - (x-a) - (x^3 - x) = -3ax^2 + 3a^2x - a^3 + a$, sejam α e β as raízes de ① (onde $\alpha < \beta$)

$\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = \dfrac{a^2-1}{3}$



$\boldsymbol{S} = \displaystyle\int_\alpha^\beta (-3ax^2 + 3a^2x - a^3 + a)dx$

$= -3a \displaystyle\int_\alpha^\beta (x^2 - ax + \frac{a^2-1}{3})dx$

$= \dfrac{a}{2}(\beta - \alpha)^3$ ← Use a fórmula do L124b.

$= \dfrac{a}{2}[\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}]^3 = \dfrac{a}{2}\left[\sqrt{a^2 - \dfrac{4}{3}(a^2-1)}\right]^3$

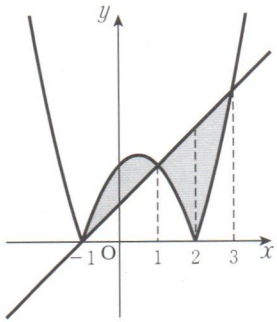
$= \boldsymbol{\dfrac{a}{2}\left(\sqrt{\dfrac{4-a^2}{3}}\right)^3}$

2. Encontre a área, S, limitada pela seguinte curva e reta:

$y = |\, x^2 - x - 2 \,|, \quad y = x + 1$

➡L38

[Res.] $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$



Quando $x \le -1$ ou $x \ge 2$,

$|\, x^2 - x - 2 \,| = x^2 - x - 2$

De $x^2 - x - 2 = x + 1$,

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

Portanto, $x = -1,\ 3$

Quando $-1 \le x \le 2$,

$|\, x^2 - x - 2 \,| = -x^2 + x + 2$

De $-x^2 + x + 2 = x + 1$,

$x^2 - 1 = 0$

Portanto, $x = -1,\ 1$

$$S = \int_{-1}^{1} [(-x^2 + x + 2) - (x+1)]\,dx + \int_{1}^{2} [(x+1) - (-x^2 + x + 2)]\,dx$$

$$+ \int_{2}^{3} [(x+1) - (x^2 - x - 2)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)\,dx + \int_{2}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx$$

$$= 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_2^3$$

$$= 2\left(-\frac{1}{3} + 1\right) + \left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right]$$

$$+ \left[(-9 + 9 + 9) - \left(-\frac{8}{3} + 4 + 6\right)\right]$$

$$= \frac{13}{3}$$

L 197a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração II

(33 pontos)

1. Dadas as curvas $C_1 : y = x^2$ e $C_2 : y = (x-2)^2 + 2$, complete os exercícios da face a e b.

(1) A curva C_1 tem uma tangente no ponto $(p,\ p^2)$. A mesma reta é também tangente à curva C_2. Encontre a equação da tangente.

[Res.] Seja $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

Usando as coordenadas $(p,\ p^2)$, e a inclinação,

a equação da tangente é

$y = 2p(x-p) + p^2 = 2px - p^2 \quad \cdots ①$

Sendo ① igual a C_2,

$2px - p^2 = (x-2)^2 + 2$

$x^2 - 2(p+2)x + 6 + p^2 = 0$

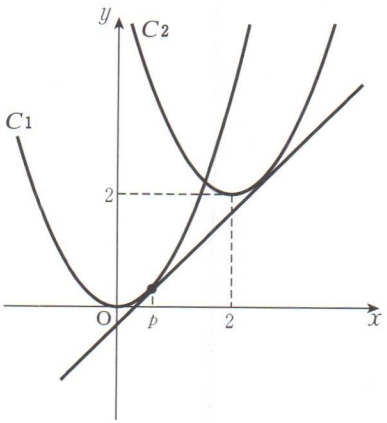
$\dfrac{D}{4} = (p+2)^2 - (6+p^2)$

$= 4p - 2 = 0$

Portanto, $p = \dfrac{1}{2} \quad \cdots ②$

Substituindo ② em ①,

$\boldsymbol{y = x - \dfrac{1}{4}}$



(2) Seja a a coordenada x do ponto onde C_1 e C_2 se interceptam. Encontre o valor de a.

[Res.] $a^2=(a-2)^2+2$

$4a-6=0$

Portanto, $\boldsymbol{a=\frac{3}{2}}$

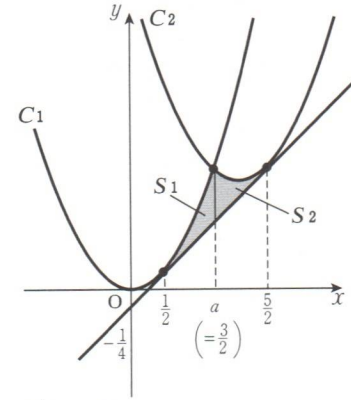
(3) Seja S_1 a área limitada por C_1, a tangente de (1), e a reta $x=a$.
Seja S_2 a área limitada por C_2, a tangente de (1), e a reta $x=a$.
Encontre a razão das áreas $S_1 : S_2$.

[Res.] Encontre o ponto de tangência de C_2 e a tangente de (1),

$(x-2)^2+2=x-\frac{1}{4}$

$(2x-5)^2=0$

$x=\frac{5}{2}$



$$S_1=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left[x^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\left(\frac{9}{8}-\frac{9}{8}+\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{3}$$

$$S_2=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left[x^2-4x+6-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{25}{4}x\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}$$

$$=\left(\frac{125}{24}-\frac{125}{8}+\frac{125}{8}\right)-\left(\frac{9}{8}-\frac{45}{8}+\frac{75}{8}\right)$$

$$=\frac{125}{24}-\frac{39}{8}=\frac{1}{3}$$

Portanto, $S_1 : S_2=\frac{1}{3} : \frac{1}{3}=\mathbf{1 : 1}$

L 198a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração II

(33 pontos)

1. As duas curvas $C_1 : y = x^2$ e $C_2 : y = -2x^2 + ax + b$ compartilham uma tangente comum com inclinação 4.

(1) Encontre o ponto de tangência, e os valores de a e b.

[Res.] Seja $f(x) = x^2$, e seja $g(x) = -2x^2 + ax + b$

$f'(x) = 2x$

De $2x = 4$, $x = 2$ e $f(2) = 4$

Portanto, o ponto de tangência é **(2, 4)**.

$g'(x) = -4x + a$, $g'(2) = -8 + a$

De $-8 + a = 4$, $a = 12$

De $g(2) = -8 + 2a + b = 4$, $b = -12$

Portanto, $\boldsymbol{a = 12}$ e $\boldsymbol{b = -12}$

(2) Encontre a equação da reta com inclinação -1 passando pelo ponto de tangência de C_1 e C_2.

[Res.] $y = -1 \cdot (x - 2) + 4$

Portanto, $\boldsymbol{y = -x + 6}$

(3) Seja S_1 a área limitada pela reta (2) e C_1.
Seja S_2 a área limitada pela reta (2) e C_2.
Encontre a razão das áreas $S_1 : S_2$.

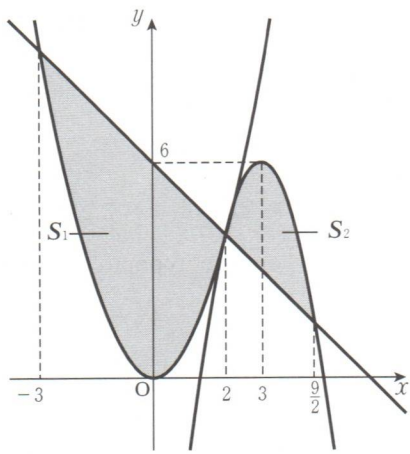
[Res.] Encontrando os pontos de intersecção de C_1 e $y=-x+6$:

$x^2=-x+6$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

Portanto, $x=-3,\ 2$



$$S_1=\int_{-3}^{2}(-x+6-x^2)dx$$

$$=-\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}(2+3)^3$$

$$=\frac{125}{6}$$

Encontrando os pontos de intersecção de C_2 e $y=-x+6$:

$-2x^2+12x-12=-x+6$

$2x^2-13x+18=0$

$(2x-9)(x-2)=0$

Portanto, $x=2,\ \frac{9}{2}$

$$S_2=\int_{2}^{\frac{9}{2}}[-2x^2+12x-12-(-x+6)]dx$$

$$=-2\int_{2}^{\frac{9}{2}}(x-2)\left(x-\frac{9}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}-2\right)^3$$

$$=\frac{125}{24}$$

Portanto, $S_1 : S_2=\frac{125}{6} : \frac{125}{24}=\mathbf{4 : 1}$

L 199a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração II

(50 pontos)

1. Os pontos A$(2,\ 2)$ e B$(-1,\ -1)$ pertencem à parábola $y=x^2-2$. Localizando o ponto P$(p,\ p^2-2)$ na parábola entre os pontos A e B, complete os exercícios da face a e b.

(1) Expresse a área de △ABP em termos de p.

[Res.] Seja Q o ponto de intersecção da reta AB e a reta $x=p$.

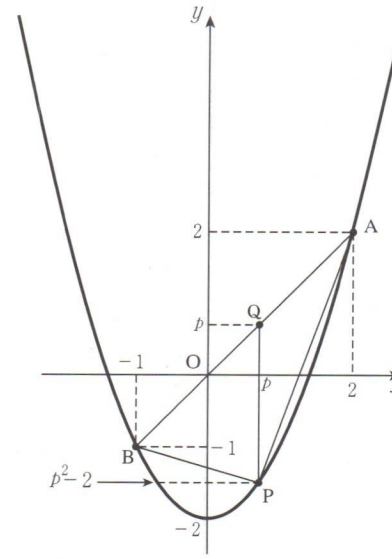
Como a inclinação de AB é 1, e como a reta passa pela origem, a equação da reta AB é:

$y=x$

As coordenadas do ponto Q são $(p,\ p)$.

$\mathrm{PQ}=p-(p^2-2)=-p^2+p+2$

Se dividirmos △ABP em 2 triângulos, △PQA e △PQB, com PQ sendo a base de cada triângulo, as alturas são respectivamente $2-p$ e $p+1$



$$\triangle\mathrm{PQA}=\frac{1}{2}(-p^2+p+2)(2-p)$$

$$\triangle\mathrm{PQB}=\frac{1}{2}(-p^2+p+2)(p+1)$$

Portanto,

$$\triangle\mathbf{ABP}=\triangle\mathrm{PQA}+\triangle\mathrm{PQB}$$

$$=\frac{1}{2}(-p^2+p+2)(2-p+p+1)$$

$$=-\frac{3}{2}(\boldsymbol{p^2-p-2})$$

L199b

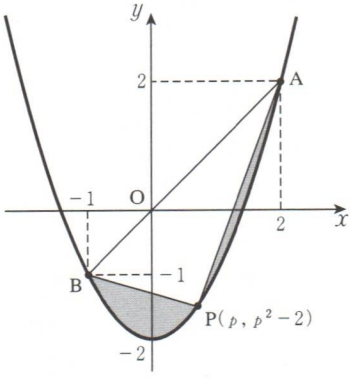
(2) Encontre o valor p de forma que a área, S, da região limitada por AP, BP e a parábola seja mínima.

[Res.] Seja S_1 a área da região limitada pela parábola e a reta AB.

$$S_1 = \int_{-1}^{2} [x-(x^2-2)]\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{2} (x+1)(x-2)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(2+1)^3 = \frac{9}{2}$$



$$S = S_1 - \triangle ABP$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{3}{2}(p^2-p-2)$$

$$= \frac{3}{2}(p^2-p+1)$$

$$= \frac{3}{2}\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

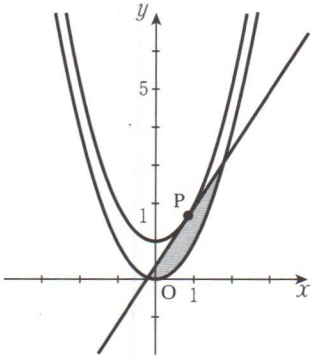
Portanto, a área, S, é mínima quando $\boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$.

[Referência para a próxima página, para uma solucão alternativa.]

L 200a KUMON Resumo de Diferenciação e Integração II

(50 pontos)

1. Dado que a parábola $y = x^2 + 1$ tem uma tangente no ponto $P(a,\ a^2+1)$ encontre a área, S, limitada pela parábola $y = x^2+1$, a tangente e a parábola $y = x^2$.



[Res.] Seja $f(x) = x^2 + 1$

De $f'(x) = 2x$, $\quad f'(a) = 2a$

A equação da tangente é:

$y = 2a(x-a) + a^2 + 1 = 2ax - a^2 + 1$

Sendo esta igual a $y = x^2$,

para encontrar os pontos de intersecção,

$x^2 = 2ax - a^2 + 1$

$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$

Resolvendo a equação $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$,

seja α e β (onde $\alpha < \beta$) as raízes, então

$\alpha + \beta = 2a$, $\quad \alpha\beta = a^2 - 1$

Portanto,

$$S = \int_\alpha^\beta (2ax - a^2 + 1 - x^2)\,dx$$

$$= -\int_\alpha^\beta (x^2 - 2ax + a^2 - 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$= \frac{1}{6}\left[\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}\right]^3$$

Use a fórmula do L I 24b.

$$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4}\right)^3$$

$$= \frac{4}{3}$$

2. A parábola $y=-x^2$ tem duas retas tangentes que se encontram no ponto P, localizado na reta $y=-x+1$. Encontre a coordenada x do ponto P para que a área, S, limitada pela reta que passa pelos dois pontos de tangência e a parábola, seja mínima.

[Res.] Sejam as coordenadas do ponto P $(a,\ -a+1)$.

Seja $(t,\ -t^2)$ o ponto de tangência com $y=-x^2$.

A tangente é então:

$y=-2t(x-t)-t^2=-2tx+t^2 \quad \cdots ①$

Substituindo as coordenadas de P$(a,\ -a+1)$ em ①,

$-a+1=-2ta+t^2$

$t^2-2at+a-1=0 \quad \cdots ②$

Se α e β (onde $\alpha<\beta$) são as coordenadas x dos pontos de tangência entre as duas retas tangentes e a parábola, então α e β são as raízes de ②.

Portanto $\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a-1$

A equação da reta que passa pelos dois pontos de tangência, $(\alpha,\ -\alpha^2)$ e $(\beta,\ -\beta^2)$, é:

$$y=\frac{-\alpha^2+\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha)-\alpha^2=-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=-2ax+a-1$$

Portanto,

$$S=\int_\alpha^\beta[-x^2-(-2ax+a-1)]dx$$

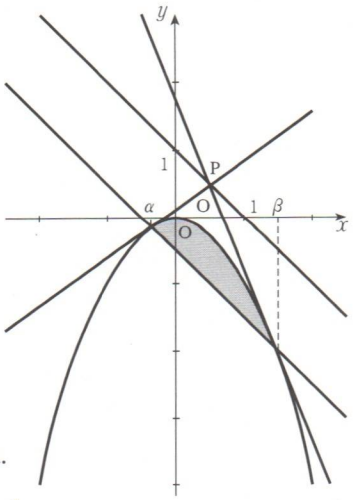
$$=-\int_\alpha^\beta(x^2-2ax+a-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}[\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}]^3$$

$$=\frac{1}{6}[\sqrt{4a^2-4(a-1)}]^3$$

$$=\frac{1}{6}\left[\sqrt{4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+3}\right]^3$$



Quando $a=\frac{1}{2}$, a área, S, será mínima.

Portanto, a coordenada x do ponto P é $\frac{1}{2}$.